ALJABAR VECTOR BERBASIS KEISLAMAN DAN BUDAYA LAMPUNG

Aljabar Vector Berbasis Keislaman dan Budaya Lampung adalah buku inovatif yang menggabungkan konsep-konsep matematika modern dengan nilai-nilai keislaman dan kearifan lokal budaya Lampung. Buku ini dimulai dengan pengantar mengenai pentingnya aljabar vektor dan alasan di balik pendekatan berbasis keislaman dan budaya lokal. Bab-bab selanjutnya mengupas dasar-dasar aljabar vektor seperti definisi vektor, operasi dasar, dan ruang vektor, disertai contoh-contoh relevan yang mencerminkan kehidupan sehari-hari masyarakat Lampung serta nilai-nilai islami.

Melalui buku ini, pembaca diajak untuk melihat matematika tidak hanya sebagai disiplin ilmu abstrak, tetapi sebagai bagian integral dari kehidupan yang bisa dimaknai melalui perspektif budaya dan agama. Pendekatan ini memperdalam pemahaman konsep-konsep matematika sambil menumbuhkan rasa bangga dan cinta terhadap budaya lokal serta memperkuat nilai-nilai keislaman. Buku ini cocok untuk siswa, pendidik, dan siapa saja yang ingin mempelajari aljabar vektor dengan cara yang lebih bermakna dan kontekstual.

Penerbit LADUNY ALIFATAMA
Anggota IKAPI
Jl. Ki Hajar Dewantara No. 49, Kota Metro – Lampung.
Telp. 085269181545 - 0811361113

ISBN:978-623-489-xxx-x

ALJABAR VECTOR BERBASIS KEISLAMAN DAN BUDAYA LAMPUNG

Dona Dinda Pratiwi, dkk.

Dona Dinda Pratiwi
Bambang Sri Anggoro
Fanny Irandha

ALJABAR VECTOR BERBASIS KEISLAMAN DAN BUDAYA LAMPUNG

ALJABAR VECTOR

BERBASIS KEISLAMAN DAN BUDAYA LAMPUNG

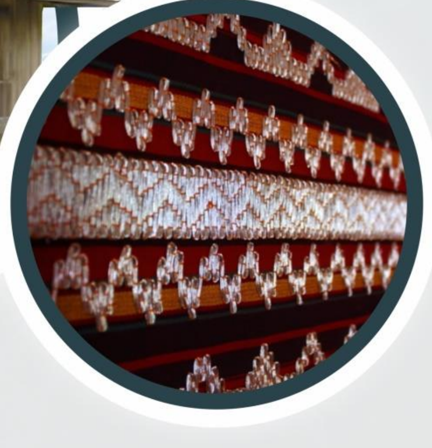
Dona Dinda Pratiwi
Bambang Sri Anggoro
Fanny Irandha

Hak Cipta Pada Penulis

Tidak boleh diproduksi sebagian atau keseluruhannya dalam bentuk apapapun tanpa izin tertulis dari penulis. Kutipan Pasal 9 Ayat (3) dan Pasal 10 UU No 28 tahun 2014 Tentang Hak Cipta.

Dona Dinda Pratiwi
Bambang Sri Anggoro
Fanny Irandha

ALJABAR VECTOR BERBASIS KEISLAMAN DAN BUDAYA LAMPUNG



ALJABAR VECTOR BERBASIS KEISLAMAN DAN BUDAYA LAMPUNG

Penulis :
Dona Dinda Pratiwi, M.Pd.
Bambang Sri Anggoro
Fanny Irandha

Desain Cover
Team Laduny Creative

Lay Out
Team Laduny Creative

ISBN : Sedang Dalam Antrian
16 x 24 cm; viii + 131 Hal

Cetakan Pertama, Mei 2024

Dicetak dan Diterbitkan oleh:
CV. LADUNY ALIFATAMA
Jl. Ki Hajar Dewantara No. 49 Iringmulyo, Metro – Lampung.
Telp. 0725 (7855820) – 085269181545
Email: ladunyprinting@gmail.com

ABSTRAK

Aljabar Vector Berbasis Keislaman dan Budaya Lampung adalah buku inovatif yang menggabungkan konsep-konsep matematika modern dengan nilai-nilai keislaman dan kearifan lokal budaya Lampung. Buku ini dimulai dengan pengenalan mengenai pentingnya vektor aljabar dan alasan di balik pendekatan berbasis keislaman dan budaya lokal. Bab-bab selanjutnya mengupas dasar-dasar aljabar vektor seperti definisi vektor, operasi dasar, dan ruang vektor, disertai contoh-contoh relevan yang mewakili kehidupan sehari-hari masyarakat Lampung serta nilai-nilai Islami. Melalui buku ini, pembaca diajak untuk melihat matematika tidak hanya sebagai disiplin ilmu abstrak, tetapi sebagai bagian integral dari kehidupan yang dapat dimaknai melalui perspektif budaya dan agama. Pendekatan ini memperdalam pemahaman konsep-konsep matematika sambil menumbuhkan rasa bangga dan cinta terhadap budaya lokal serta memperkuat nilai-nilai keislaman. Buku ini cocok untuk siswa, pendidik, dan siapa saja yang ingin mempelajari vektor aljabar dengan cara yang lebih bermakna dan kontekstual.

ABSTRACT

Vector Algebra Based on Islam and Lampung Culture is an innovative book that combines modern mathematical concepts with Islamic values and local wisdom of Lampung culture. This book begins with an introduction to the importance of vector algebra and the reasons behind an Islamic and local culture-based approach. The following chapters examine the basics of vector algebra such as the definition of vectors, basic operations, and vector spaces, accompanied by relevant examples that represent the daily life of Lampung people and Islamic values. Through this book, readers are invited to see mathematics not only as an abstract scientific discipline, but as an integral part of life that can be interpreted from cultural and religious perspectives. This approach deepens understanding of mathematical concepts while fostering a sense of pride and love for local culture and strengthening Islamic values. This book is suitable for students, educators, and anyone who wants to learn vector algebra in a more meaningful and contextual way.

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Yang bertandatangan di bawah ini :

Nama	: Fanny Irandha
Alamat	: Gg. Nila I Bumiwaras Kec. Teluk Betung Selatan Bandar Lampung
Nik	: 1808026503990003
Telp./HP	: 085788888627

menyatakan dengan sesungguhnya, bahwa :

Judul	: Aljabar Vektor Berbasis Keislaman & Budaya Lampung
Penulis	: Fanny Irandha
Editor	: -

adalah benar merupakan karya asli yang dibuat untuk diterbitkan dan disebarluaskan secara umum, melalui :

Penerbit	: Laduny Alifatama
Alamat	: Jl. Ki Hajar Dewantara No. 49 Iringmulyo, Metro –Lampung. Telp. 0725 (7855820) – 085269181545 Email: ladunyprinting@gmail.com

Demikian surat ini dibuat dengan sebenar-benarnya serta akan menjadi pertanggungjawaban kami jika terdapat penyalahgunaan dan akibat yang ditimbulkannya.

Metro, Mei 2024

Penanggung jawab Penerbit,

LADUNY
Maju Karena Ilmu

Joni Wuryanto, M.Pd.

Penulis,

10000 METERAI TEMPEL
9A33EALX160769208

(Fanny Irandha)

KEMENTERIAN AGAMA
UIN RADEN INTAN LAMPUNG
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN
Alamat : Jl. Let. Kol. H. Endro Suratmin Sukarame 1Bandar Lampung 35131 Telp(0721)703260

PERSETUJUAN

Judul Buku	:	**ALJABAR VEKTOR BERBASIS KEISLAMAN DAN BUDAYA LAMPUNG**
Nama	:	**FANNY IRANDHA**
NPM	:	**1711050161**
Fakultas	:	**Tarbiyah dan Keguruan**
Jurusan	:	**Pendidikan Matematika**

MENYETUJUI

Untuk di Munaqosyahkan dan dipertahankan dalam sidang Munaqosyah Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Raden Intan Lampung

Pembimbing I	**Pembimbing II**
Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd	**Dona Dinda Pratiwi, M.Pd.**
NIP. 198402282006041004	**NIP. 199004102015032004**

Mengetahui,
Ketua Prodi Pendidikan Matematika

Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd
NIP. 198402282006041004

KEMENTERIAN AGAMA
UIN RADEN INTAN LAMPUNG
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN
Alamat : Jl. Let. Kol. H. Endro Suratmin Sukarame 1Bandar Lampung 35131 Telp(0721)703260

PENGESAHAN

Buku dengan judul **"ALJABAR VEKTOR BERBASIS KEISLAMAN DAN BUDAYA LAMPUNG"** disusun oleh: **Fanny Irandha**, NPM: **1711050161**, Program Studi: **Pendidikan Matematika**, telah diujikan dalam sidang Munaqosyah di Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Raden Intan Lampung pada Hari/Tanggal : Selasa, 11 Juni 2024, Pukul 10.01-12.00 WIB. Tempat : Ruang Sidang PSPM.

TIM MUNAQASAH SKRIPSI

Ketua	**: Dr. H. Subandi, MM.**	(..................)
Sekretaris	**: Arini Alhaq, M.Pd.**	(..................)
Penguji Utama	**: Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd**	(..................)
Penguji Pendamping I	**: Dr. Bambang Sri Anggoro M.Pd**	(..................)
Penguji Pendamping II	**: Dona Dinda Pratiwi, M.Pd.**	(..................)

Mengetahui
Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan

KEMENTERIAN AGAMA FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN REPUBLIK INDONESIA

Prof. Dr. Hj. Nirva Diana, M.Pd
NIP. 196408281988032002

MOTTO

لَا يُكَلِّفُ اللّٰهُ نَفْسًا اِلَّا وُسْعَهَا ۗ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ ۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَآ اِنْ نَّسِيْنَآ اَوْ
اَخْطَأْنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَآ اِصْرًا كَمَا حَمَلْتَهٗ عَلَى الَّذِيْنَ مِنْ قَبْلِنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا
طَا قَةَ لَنَا بِهٖ ۚ وَا عْفُ عَنَّا ۗ وَا غْفِرْ لَنَا ۗ وَا رْحَمْنَا ۗ اَنْتَ مَوْلٰىنَا فَا نْصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكٰفِرِيْنَ

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Dia mendapat (pahala) dari (kebajikan) yang dikerjakannya dan dia mendapat (siksa) dari (kejahatan) yang diperbuatnya. (Mereka berdoa), "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami melakukan kesalahan. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebani kami dengan beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tidak sanggup kami memikulnya. Maafkanlah kami, ampunilah kami, dan rahmatilah kami. Engkaulah pelindung kami, maka tolonglah kami menghadapi orang-orang kafir."

(QS. Al-Baqarah 2: Ayat 286)

PERSEMBAHAN

Puji syukur allhamdulillah hamba panjatkan kepada-Mu Ya Allah SWT yang telah memberikan kekuatan dan kelancaran dalam menyelesaikan tugas akhir skripsi. Shalawat salam penulis sanjung agungkan kepada baginda nabi agung Muhammad SAW yang menjadi suri tauladan seluruh umat islam dalam menjalani kehidupan. Penulis persembahkan sebuah karya ini kepada:

1. Kedua orang tuaku tercinta dan tersayang, Bapak Muhammad Irin dan Ibu Rosmala Dewi, yang telah memberikan cinta, kasih dan sayang dan doa yang tulus untuk saya. Terimakasih tak terhingga untuk bapak dan ibu yang telah mendidik, membesarkan, membiayai pendidikan saya, memberikan semangat, dan dukungan selama ini serta menghantarkan saya sampai menyelesaikan Pendidikan S1 di Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung.
2. Adikku Ezri Fazri Anugrah terimakasih atas kasih sayang dan semangat yang sudah diberikan.
3. Diriku sendiri, terimakasih Aku yang sudah berjuang sampai saat ini. Semoga aku selalu kuat dan semangat menjalani hari-hari selanjutnya. Semoga perjalananku kemarin, hari ini dan esok selalu diberikan keberkahan dan petunjuk oleh allah SWT.
4. Calon suamiku, Sendi Alqormi Rafiqih terima kasih sudah menjadi support sistem yang selalu menasehati dan membimbing saya setiap harinya.
5. Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung yang telah menjadi tempatku menuntut ilmu dalam proses meraih cita-citaku menjadi seorang pendidik.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Fanny Irandha yang lahir di Bandar Lampung pada tanggal 25 Maret 1999. Penulis merupakan putri pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Muhammad Irin dan Ibu Rosmala Dewi. Penulis mengawali pendidikan di TK RA. Alhidayah yang dimulai pada tahun 2004 dan diselesaikan pada tahun 2005 kemudian penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Dasar (SD) Negeri 1 Kasui yang dimulai pada tahun 2005 dan diselesaikan pada tahun 2011 kemudian melanjutkan ke SMP Negeri 1 Kasui dan diselesaikan pada tahun 2014 selanjutnya untuk jenjang sekolah menengah atas dilanjutkan di SMA Negeri Kasui pada tahun 2014 dan diselesaikan pada tahun 2017. Pada tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Raden Intan Lampung jurusan Pendidikan Matematika. Pada bulan juli 2020 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata - Dari Rumah (KKN-DR) di Desa Talang Mangga Kecamatan Kasui, Waykanan Pada bulan oktober 2020 penulis melaksanakan Praktik Pengalaman Lapangan (PPL) di MIN 12 Bandar Lampung.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur allhamdulillah penulis panjatkan Kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan anugrahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir kuliah buku dengan judul " Aljabar Vector Berbasis Keislaman Dan Budaya Lampung " sebagai syarat guna memperoleh gelar sarjana S1 pendidikan matematika. Tidak lupa shalawat beriring salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita nabi agung Muhammad SAW yang mudah-mudahkan kita semua mendapatkan syafaatnya kelak diyaumil akhir. Aamiin.

Penyelesaian tugas skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, bimbingan, serta bantuan dari beberapa pihak. Sehingga penulis mengucapkan terimaksih kepada:

1. Bapak Prof. H. Wan Jamaluddin Z, M.Ag., Ph. D selaku Rektor UIN Raden Intan Lampung.
2. Ibu Prof. Dr. Hj. Nirva Diana, M.Pd, selaku Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Raden Intan Lampung. Kepala Prodi Matematika.
3. Bapak Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd selaku kepala pogram studi Pendidikan Matematika dan Pembimbing I yang telah memberi arahan dan bimbingan selama proses menyelesaikan penulisan buku.
4. Dosen Ibu Dona Dinda Pratiwi M.Pd selaku pembimbing II yang sudah banyak membantu memberi arahan dan bimbingan selama proses menyelesaikan penulisan buku.
5. Bapak dan Ibu dosen fakultas tarbiyah dan keguruan jurusan pendidikan matematika yang telah membimbing dan memberikan ilmunya selama menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung.
6. Keluarga tercinta terutama kedua orang tua yang selalu memberikan semangat, dukungan, dan fasilitas yang telah

diberikan selama ini.

7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang telah membantu dalam proses penyelesaian penulisan buku
8. Universitas tercinta UIN Raden Intan Lampung.

Semoga bantuan, bimbingan, arahan, serta dukungan yang telah diberikan akan menjadi amal yang baik dan akan mendapatkan balasan dari Allah SWT. Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian penulisan buku ini memiliki banyak kekurangan dan jauh dari kesempurnaan. Sehingga penulis berharap adanya saran dan kritik yang membangun dari pembaca. Semoga buku ini dapat memberi manfaat bagi semua pihak. Aamiin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Bandar Lampung, 3 Juni 2024

Fanny Irandha
NPM. 1711050161

DAFTAR ISI

BAB 1
RUANG VEKTOR

3.1 Sejarah Ruang Vektor

Secara historis, gagasan awal yang berbuah pada konsep ruang vektor dapat dilacak dari geometri analitik abad ke-17, matriks, sistem persamaan linear, dan vektor Euklides. Pembahasan modern yang lebih abstrak pertama kali dirumuskan oleh Giuseppe Peano pada akhir abad ke-19, yang meliput objek lebih umum daripada ruang Euklides, namun kebanyakan teori tersebut dapat dipandang sebagai perluasan gagasan geometri klasik seperti garis, bidang, dan analognya yang berdimensi lebih tinggi.

Ruang vektor berasal dari geometri *affine*, melalui pengenalan koordinat pada bidang atau ruang tiga dimensi. Sekitar tahun 1636, ahli matematika *Prancis René Descartes* dan *Pierre de Fermat* mendirikan geometri analitik dengan mengidentifikasi solusi persamaan dua variabel dengan titik-titik pada bidang kurva.

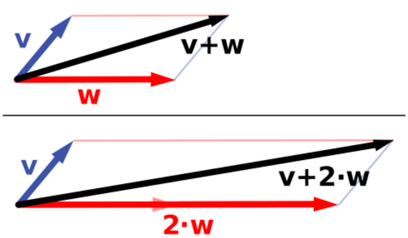
Untuk mencapai solusi geometris tanpa menggunakan koordinat, *Bolzano* diperkenalkan pada tahun 1804, operasi tertentu pada titik, garis dan bidang, yang merupakan pendahulu vektor. Landasan dari definisi vektor adalah Bellavitis pengertian *bipoint*, segmen berorientasi yang salah satu ujungnya adalah asal dan yang lainnya adalah target. Vektor dipertimbangkan kembali dengan penyajian bilangan kompleks oleh *Argand* dan *Hamilton.*

Pada tahun 1857, *Cayley* memperkenalkan notasi matriks yang memungkinkan harmonisasi dan penyederhanaan peta linear. Sekitar waktu yang sama, *Grassmann* membayangkan kumpulan objek abstrak yang diberkahi dengan operasi. Dalam karyanya, konsep kemerdekaan linear dan dimensi, serta produk skalar hadir. Sebenarnya karya *Grassmann* tahun 1844 melebihi kerangka vektor ruang, karena perkaliannya yang mempertimbangkan, juga membawanya kepada apa yang sekarang disebut aljabar.

3.1.1 Definisi Vektor

Vektor adalah ruas garis berarah yang memiliki besaran (nilai) dan arah tertentu. Secara geometris, suatu vektor dapat digambarkan sebagai ruas garis berarah dengan panjang ruas garis menyatakan besar vektor, dan arah ruas garis menyatakan arah vektor.

Dalam kenyataannya, manusia tidak hanya bekerja dengan sesuatu yang statis (diam), tetapi sering juga bekerja dengan sesuatu bersifat dinamis (bergerak). Bergerak yang dimaksud memiliki makna kekhasan bila sesuatu yang bergerak pasti mempunyai arah. Istilah vektor pada mulanya terlahir dari fenomena bahwa materi di alam raya ini terbagi atas materi yang bergerak, sehingga berakibat adanya arah (vektor) sedangkan materi yang tidak bergerak tidak memuat arah (saklar).



Keterangan: Penjumlahan vektor dan perkalian skalar:

Sebuah vektor v (biru) ditambahkan ke vektor lain w (merah, ilustrasi atas).
Di bawah, w diregangkan dengan faktor 2, menghasilkan jumlah $\boldsymbol{v} + 2 \cdot \boldsymbol{w}$.

Manusia ibarat sebuah vektor yang berawal dan berujung. Berawal artinya mempunyai asal usul penciptaan dan berujung artinya akan mencapai suatu fase yang disebut kematian. Sebuah vektor adalah garis yang memiliki titik awal. Titik awal itu akan berkembang menjadi sebuah bentuk, bentuk itu disebut dengan garis. Sehingga dapat diibaratkan sebagaimana manusia yang melakukan proses perkembangan, dikisahkan di dalam Al-Qur'an dalam Surah Ar-Rum ayat 20:

وَمِنْ آيَاتِهِ أَنْ خَلَقَكُمْ مِنْ تُرَابٍ ثُمَّ إِذَا أَنْتُمْ بَشَرٌ تَنْتَشِرُونَ

Artinya: *"dan di antara tanda-tanda (kebesaran)-Nya ialah Dia menciptakan kamu dari tanah, kemudian tiba-tiba kamu (menjadi) manusia yang berkembang biak."*

Maksud dari Surah Ar-Rum ayat 20 yaitu tentang misi kehidupan manusia di dunia ini adalah ibarat sebuah vektor, dimana sebuah vektor adalah suatu besaran atau kuantitas yang berorientasi. Vektor memuat arah, begitu pula manusia. Sebuah vektor mempunyai titik awal begitu pula manusia mempunyai awal penciptaan, manusia mempunyai asal-usul yang telah ditetapkan oleh Allah SWT.

Vektor merupakan besaran yang mempunyai besar dan arah, seperti perpindahan (*displacement*), kecepatan, gaya, dan percepatan. Berdasarkan tinjauan kajian geometri, secara umum suatu besaran vektor dapat digambarkan dengan menggunakan ruas garis berarah. Panjang dari ruas garis merupakan panjang vektor atau besar vektor, sedangkan arah dari peubah merupakan petunjuk arah vektor.

Secara garis besar, jika pada titik-titik (x, y, z) dari suatu daerah dalam ruangan R dikaitkan sebuah vektor (x, y, z), maka *V* disebut fusngsi vektor dari kedudukan atau fungsi titik vektor (vektor *function point)*, dan kita menyatakan bahwa medan vektor V telah didefinisikan dalam ruangan R.

3.1.2 Definisi Ruang Vektor

Suatu *ruang vektor* adalah suatu himpunan objek yang dapat dijumlahkan satu sama lain dan dikalikan dengan suatu bilangan, yang masing-masing menghasilkan anggota lain dalam himpunan itu.

Ruang vektor merupakan subjek dari aljabar linear, dan dipahami dengan baik dari sudut pandang ini, karena ruang vektor dicirikan oleh dimensinya, yang menspesifikasikan banyaknya arah independen dalam ruang. Teori ruang vektor juga ditingkatkan dengan memperkenalkan struktur tambahan, seperti norma atau hasil kali dalam. Ruang seperti ini muncul dengan alamiah dalam analisis matematika, dalam bentuk ruang fungsi berdimensi takhingga, dengan vektornya adalah fungsi.

Ruang vektor dapat dijelaskan sebagai berikut, anggap V adalah sembarang himpunan tak kosong dari objek di mana dua operasi didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). *Penjumlahan* yang kita maksud adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap pasangan objek u dan v dalam V dengan suatu objek $u + v$, yang disebut sebagai jumlah u dan v; yang kita maksud dengan *perkalian skalar* adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap skalar k dan setiap objek u dalam V dengan objek ku, yang disebut perkalian skalar dari u dengan k.

3.2 Ruang n-Euclid

Konsep generalisasi dari vektor R^2 atau R^3 dikembangkan pada bahasan ini. Seperti yang telah diketahui, sebuah vektor R^2 dinyatakan oleh sepasang bilangan berurut $u = (u_1, u_2)$, begitu juga vektor di R^3 dinyatakan tiga bilangan berurut $u = (u_1, u_2, u_3)$. Surah An-Nur ayat 45 mendefinisikan pula mengenai sepasang bilangan berurut:

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٍ مِّن مَّآءٍۖ فَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ بَطْنِهِۦ
وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ رِجْلَيْنِ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰٓ أَرْبَعٍۚ
يَخْلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ

Artinya: *"Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu."*

Isi kandungan Surat An-Nur ayat 45 tersebut menjelaskan sekelompok, segolongan, atau sekumpulan makhluk yang disebut hewan. Dalam kelompok hewan tersebut ada kelompok yang berjalan tanpa kaki, dengan dua kaki, empat, atau bahkan lebih sesuai dengan yang dikehendaki Allah.

Permasalahan mulai timbul setelah R^3 yaitu apakah perlu konsep vektor dikembangkan R^4 dan bagaimana visualisasinya? Jawabnya tentu perlu dikembangkan ke R^4, R^5, bahkan sampai R^n. Hal ini dapat dilihat pada sistem persamaan linear yang telah dibicarakan pada subbab sebelumnya yang ternyata permasalahan vektor bukan hanya sampai R^3 melainkan sampai R^n. Masalah visualisasi tidak dapat dilaksanakan karena dunia ini hanya disusun oleh konsep tiga dimensi.

Penjelasan di atas diperkuat oleh pendapat John Leon, yang menjelaskan tentang ruang-n Euclid juga yaitu sebagai berikut: Mungkin ruang vektor yang paling elementer adalah ruang vektor Euclides $R^n, n = 1,2, \ldots$. Untuk sederhananya, marilah mula-mula kita tinjau R^2. Vektor-vektor taknol dalam R^2 dapat dinyatakan secara sederhana oleh segmen-segmen garis berarah. Gambaran geometris ini akan membantu kita membayangkan bagaimana operasi-operasi perkalian dan penjumlahan skalar bekerja dalam R^2.

Jadi, dapat disimpulkan bahwasanya ruang-n Euclid dapat dikembangkan sampai R^n.

Definisi-1

Sebuah vektor R^n dinyatakan oleh n bilangan terurut yaitu $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Pada R^2 atau R^3 sebuah urutan bilangan di atas ada maknanya yaitu sebagai titik atau sebagai vektor. Dalam R^n keduanya dianggap sama sehingga R^n merupakan generalisasi titik sekaligus generalisasi vektor.

Definisi-2

Vektor nol ialah vektor yang semua entrinya nol, ditulis $o = (0, 0, \ldots, 0)$. Misalkan $u, v \in R^n$, dua vektor disebut sama, atau $u = v$, jika dan hanya jika $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$ {*semua entri yang terletak sama*}.

3.3. Ruang Vektor Umum

Misalkan *u*, *v*, dan *w* adalah unsur pada ruang *V* dan *k, l* merupakan skalar bilangan Riil, maka *V* dinamakan ruang vektor jika terpenuhi aksioma:

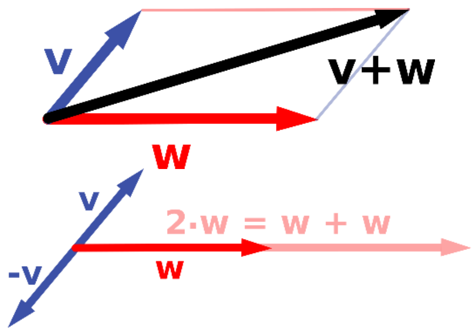
1. Jika *u* dan *v* adalah vektor-vektor pada *V* maka *u+v* berada pada *V* juga.
2. $u + v = v + u$
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$
4. Terdapat 0 di *V* sehingga $u + 0 = 0 + u$, untuk setiap vektor *u* di *V.*
5. Untuk setiap *u* di *V,* terdapat *u* di *V* yang dinamakan negatif *u* sehingga *u + (-u) = (-u) + u = 0.*
6. Jika *k* adalah sebarang skalar dan *u* berada di *V,* maka *ku* berada di *V.*
7. $k(u + v) = ku + kv$
8. $(k + l)u = ku + lu$
9. $k(lu) = l(ku) = (kl)u$
10. Terdapat unsur 1 sebagai unsur identitas perkalian sehingga *1.u = u.*

Jadi, dapat disimpulkan bahwa; ***ruang vektor*** adalah sebuah matriks atau fungsi yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian terhadap skalar yang memenuhi 10 aksioma. Sedangkan, apabila matriks atau fungsi tersebut tidak memenuhi salah satunya saja dari kesepuluh aksioma itu, maka matriks atau fungsi tersebut ***bukan ruang vektor***.

Contoh-contoh Ruang Vektor

1. Panah suatu bidang

Contoh pertama ruang vektor terdiri dari panah dalam bidang tetap, dimulai dari satu titik tetap. Diberikan dua panah seperti, *v* dan *w*, jajaran genjang yang direntang oleh dua panah ini berisi satu panah diagonal yang juga dimulai dari titik awal. Panah baru ini disebut *jumlah* dari dua panah, dan dilambangkan *v + w*.



2. **Pasangan angka yang diurutkan**

   Contoh kedua dari ruang vektor disediakan oleh pasangan bilangan riil *x* dan *y*. Urutan komponen *x* dan *y* signifikan, sehingga pasangan seperti itu juga disebut pasangan terurut. Pasangan seperti itu ditulis sebagai (*x*, *y*). Penjumlahan dari dua pasangan tersebut dan perkalian pasangan dengan bilangan didefinisikan sebagai berikut:

   $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

   dan

   $\propto (x, y) = (ax, ay)$

✓ **Contoh ruang vektor:**

1. *V* adalah himpunan vektor euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar), notasinya Rn.
2. *V* adalah himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar
   - Bentuk umum polinom orde-*n*

     $P_n(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^n$

     $q_n(x) = b_1 + b_2x + \cdots + b_nx^n$
   - Operasi standar pada polinom orde-*n*

     $P_n(x) + q_n(x) = a_1 + b_1 + (a_1 + b_1)x + \cdots +$
     $(a_n + b_n)x^n$

     $kP_n(x) = ka_1 + ka_2x + \cdots + ka_nx^n$

Notasi untuk ruang vekktor ini adalah pn

3. V adalah himpunan matriks berukuran $m\ x\ n$ dengan operasi standar (penjumlahan dan perkalian matriks dengan skalar). Ruang vektor ini sering dinotasikan dengan M_{mn}.

✓ **Contoh bukan ruang vektor:**

1. V adalah himpunan vektor yang berbentuk $(0, y)$ di R^2 dengan operasi vektor sebagai berikut:
   untuk $u = (0, u_1)$; $v = (0, u_2)$
   maka, $ku = (0, ku_2)$ dan $u + v = (0, u_2, u_2)$
2. V adalah himpunan matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ dengan operasi standar, $a, b \in R$

3.3.1 *Ruang Vektor C* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

Misalkan $C[a, b]$ menyatakan himpunan semua fungsi bernilai real yang didefinisikan dan *continue* pada interval tertutup $[a, b]$. Dalam kasus ini, himpunan semestanya adalah himpunan fungsi-fungsi. Jadi, vektor-vektornya adalah fungsi-fungsi di $C[a, b]$. Jumlah $f + g$ dari dua fungsi di $C[a, b]$ didefinisikan oleh

$$(f + g)(x) = \alpha f(x)$$

Untuk semua x di $[a, b]$. Fungsi yang baru $f + g$ adalah elemen dari $C[a, b]$, karena jumlah dari dua fungsi yang kontinu adalah kontinu. Jika f adalah fungsi di $C[a, b]$ dan α suatu bilangan real, maka αf didefinisikan oleh,

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Untuk semua x di $[a, b]$. Jelas bahwa αf berada di dalam $C[a, b]$ karena jika konstanta dikalikan dengan fungsi continue selalu kontinu. Jadi pada $C[a, b]$ telah mendefinisikan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Untuk menunjukan bahwa aksioma pertama, yaitu $(f+g)(x)=(g+f)(x)$ dipenuhi, kita harus menunjukan bahwa

$$(f+g)(x)=(g+f)(x) \text{ untuk setiap } x \in [a,b]$$

Persamaan ini benar karena

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$$

Untuk setiap x di $[a,b]$

3.3.2 Ruang Vektor P_n

Misalkan P_n adalah himpunan semua polinom dengan derajat lebih kecil dari n. Didefinisikan $p+q$ dan αp oleh

$$(p+q)(x)=p(x)+q(x)$$

dan

$$(\alpha p)(x)=\alpha p(x)$$

Untuk semua bilangan real x. Dengan mudah dapat diperlihatkan bahwa aksioma-aksioma A_1 sampai A_8 dipenuhi.

Jadi P_n dengan penjumlahan dan perkalian skalar fungsi yang biasa merupakan suatu ruang vektor.

- ✓ ***Contoh-1***

Tunjukan bahwa V yaitu himpunan matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ dengan operasi standar bukan merupakan ruang vektor, $(a,b \in R)$!

Penyelesaian.

Untuk membuktikan V bukan merupakan ruang vektor adalah cukup dengan menunjukan bahwa salah satu syarat ruang vektor tidak dipenuhi.

Akan ditunjukan apakan memenuhi syarat yang pertama :

Misalkan,

$A=\begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} r & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$; $p,q,r,s \in R$

maka, $A, B \in V$ $A + B = \begin{bmatrix} p+r & 2 \\ 2 & q+s \end{bmatrix} \in V \rightarrow$ syarat 1 tidak terpenuhi. Jadi, V bukan merupakan ruang vektor.

✓ ***Contoh-2***

Misalkan S himpunan semua vektor R^3 dengan operasi yang didefinisikan sebagai berikut :

$$k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2)$$
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

Apakah S termasuk ruang vektor atau bukan?

Penyelesaian.

Misal,

$a = (x_1, x_2)$
$b = (y_1, y_2)$
$c = (z_1, z_2)$
$\forall a, b, c \in S$

- *Aksioma 1*

  $a + b = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in S$

  $\therefore$ *terpenuhi*

- *Aksioma 2*

  $a + b = b + a$

  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2)$

  $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in S$ $\therefore$ *terpenuhi*

- *Aksioma 3*

  $a + (b + c) = (a + b) + c$

  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2 + z_1, z_2) = (x_1, x_2 + y_1, y_2) + (z_1, z_2)$

  $(x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + z_1, z_2$

  $(x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) \in S$

  $\therefore$ *terpenuhi*

- *Aksioma 4*

  $a + 0 = 0 + a = a$

  $(x_1, x_2) + (0,0) = (0,0) + (x_1, x_2) = (x_1, x_2) \in S$ $\therefore$ *terpenuhi*

- *Aksioma 5*

  $a + (-a) = (-a) + a = 0$

  $(x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (-x_1, -x_2) + (x_1, x_2)$

  $(0,0) + (0,0) = 0 \in S$ $\therefore$*terpenuhi*
- *Aksioma 6*

  $k.a = k(x_1, x_2) = kx_1 + kx_2$

  $\forall a_1, a_2 \in S$ $\therefore$*terpenuhi*
- *Aksioma 7*

  $k(a + b) = ka + kb$

  $k(x_1, x_2 + y_1, y_2) = k(x_1, x_2) + k(y_1, y_2)$

  $k(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (kx_1, kx_2) + (ky_1, ky_2)$

  $(kx_1 + ky_1, kx_2 + ky_2) = (kx_1 + ky_1, kx_2 + ky_2)$

  $\therefore$*terpenuhi*
- *Aksioma 8*

  $(k + l).a = ka + la$

  $(k + l).(x_1, x_2) = k(x_1, x_2) + l(x_1, x_2)$

  $(kx_1, x_2) + (lx_1, lx_2) = (kx_1, x_2) + (lx_1, lx_2)$ $\therefore$*terpenuhi*
- *Aksioma 9*

  $(kl).a = k(l.a)$

  $(kl).(x_1, x_2) = k(l.x_1, x_2)$

  $(klx_1, klx_2) = (klx_1, klx_2)$ $\therefore$terpenuhi
- *Aksioma 10*

  $1 + a = a$

  $1 + (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

  $(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ $\therefore$terpenuhi

Jadi, S adalah ruang vektor karena memenuhi 10 aksioma.

✓ ***Contoh-3***

Jika V himpunan semua vektor di R^3 , dengan operasi penjumlahan $u + v = (u_1 + v_2 , u_2 + v_1 , u_3 + v_3)$, sedangkan perkalian dengan skalar $ku = (ku_1,\ ku_2, ku_3)$. Buktikan bahwa V ini bukan ruang vektor!

Penyelesaian.

Dari definisi V terlihat ada yang tidak biasa yaitu operasi penjumlahan pada entri pertama dan kedua, yang secara intuisi kemungkinkan kegagalan aksioma ruang vektor.

Misal: $a = (2, 3, -1)$ dan $b = (4, 2, 4)$.

Kemudian,

$a + b = (2 + 2, 3 + 4, (-1) + 4) = (4, 7, 3)$

$b + a = (4 + 3, 2 + 2, (-1) + 4) = (7, 4, 3)$

karena $a + b \neq b + a$ berarti V ini tidak memenuhi aksioma ke 2 yaitu aksioma komutatif yang dengan demikian V ini bukanlah ruang vektor.

Vektor dalam Budaya Lampung

Vektor digunakan dalam rancang bangun dasar arsitektur untuk perhitungan panjang, sudut, dan letak. Juga untuk menentukan komponen-komponen dasar, rangka, dan pondasi di dalam bangunan.

Gambar 1. Nuwo Sesat

Terlihat pada gambar 1, rancangan pembangunan rumah adat lampung (nuwo sesat) tidak ada aturan khusus dalam ukurannya. Setidaknya, keseluruhan ukurannya seluas 50 meter x 30 meter sudah termasuk halaman. Sedangkan untuk bangunan rumahnya sendiri ∓ 12 meter x 10 meter. Bagian atap tinggi atap harus 4 kali lebih kecil dari ukuran tinggi bangunan. Atap rumah berbentuk limas. Yang jika dikonstruksikan termasuk pada ruang vektor.

LATIHAN

1. Misalkan V himpunan4 semua vektor di R^3 dengan operasi yang didefinisikan sebagai berikut : untuk $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ maka $u + v = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3)$, sedangkan $ku = (u_1, u_2, u_3)$. Tunjukkan *V* adalah ruang vektor!
2. Misalkan R menyatakan himpunan bilangan real. Didefinisikan perkalian skalar oleh $ax = a.x$ (perkalian biasa dari bilangan-bilangan real) dan definisikan penjumlahan yang dinyatakan dengan $\oplus$ oleh $x \oplus y = \mathrm{m}a\mathrm{x}(x, y)$ (maksimum dari kedua bilangan tersebut). Apakah R merupakan ruang vektor dengan operasi-operasi ini? Buktikan jawaban anda!
3. Tunjukkan bahwa himpunan semua bilangan real positif dengan operasi $x + y = xy$ dan $kx = x^k$ adalah suatu ruang vektor!

3.4. Subruang

3.4.1 Definisi Subruang

Dalam aljabar linear, subruang vektor, atau disebut juga subruang linear, adalah sebuah ruang vektor yang merupakan subhimpunan dari ruang vektor yang lebih besar. Subruang vektor biasanya disebut subruang saja, gunanya untuk membedakan dari jenis subruang yang lain. Seperti halnya dalam kandungan Surah Al-Fatir ayat 1 yaitu:

الْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ جَاعِلِ الْمَلَائِكَةِ رُسُلًا أُولِي أَجْنِحَةٍ مَثْنَىٰ وَثُلَاثَ وَرُبَاعَ ۚ يَزِيدُ فِي الْخَلْقِ مَا يَشَاءُ ۚ إِنَّ اللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ

Artinya: *"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, Yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu."*

Misalkan *V* adalah ruang atas skalar *F* dan $W \subseteq V$. *W* disebut sebagai subruang dari *V* jika *W* merupakan ruang vektor atas *F* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang sama dengan *V.*

- Dari penjelasan definisi tersebut, pemeriksaan *W* sebagai subruang dari *V* harus memenuhi aksioma ruang vektor.
- Jika *W* merupakan bagian dari suatu ruang vektor *V* yang lebih besar, maka beberapa aksioma tidak perlu dibuktikan.
- Misal, jika sifat komutatif $u + v = v + u$ berlaku pada himpunan *V*, maka pembuktian sifat ini tidak perlu dilakukan terhadap *W* karena ini berlaku untuk semua vektor pada *V*.

3.4.2 Teorema Subruang

Jika *V* adalah ruang vektor atas skalar *F* dan $W \subseteq V$, maka *W* disebut sebagai subruang dari *V* jika dan hanya jika memenuhi,

- $(\forall u, v \in W)\ \ u + v \in W$
- $(\forall k \in F,\ \forall u \in W)\ \ ku \in W$

Subruang bagian juga dapat dinyatakan menggunakan syarat-syarat berikut, dimana syarat ini ekuivalen dengan syarat-syarat yang telah dijelaskan di atas.

- ❖ $\alpha x \in S$ jika $x \in S$ untuk sembarang skalar α.
- ❖ $x + y \in S$ jika $x \in S$ dan $y \in S$.

Maka S disebut ruang bagian *(subspace)* dari V. Syarat yang pertama mengatakan bahwa S tertutup dibawah perkalian skalar. Artinya, bilamana suatu elemen dari S dikalikan suatu skalar, maka hasilnya merupakan elemen dari S. Syarat kedua menyatakan bahwa S tertutup dibawah penjumlahan. Artinya jumlah elemen dari S selalu merupakan elemen dari S. Jadi, jika kita melakukan perhitungan dengan menggunakan operasi-operasi dari V dan elemen-elemen dari S, maka kita akan selalu menghasilkan elemen-elemen dari S. Oleh karena itu, ruang bagian dari V adalah subhimpunan S yang tertutup di bawah operasi-operasi dari V.

Berikut adalah contoh dari subruang vektor dan bukan merupakan subruang vektor.

✓ ***Contoh-1***

Diketahui U adalah himpunan titik-titik di bidang dengan ordinat 0 dengan operasi standar R^2, tunjukan bahwa *U* merupakan subruang dari R^2!

Penyelesaian.

Akan ditunjukan bahwa *U* memenuhi dua syarat subruang vektor, yaitu:

- $U = \{x, 0\}$ untuk sembarang nilai x, $x \in U$

  Misalkan $\bar{a} = (x_1, 0)$ dan $\bar{b} = (x_2, 0)$ dengan x_1 , $x_2 \in R$, maka $\bar{a}, \bar{b} \in U$ $\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2, 0) \in R$, jadi $\bar{a} + \bar{b} \in R$.

  Jadi syarat ke-1 terpenuhi.

- Untuk skalar k, maka $k\bar{a} = (kx_1, 0)$ dengan $kx_1, \in R$, jadi $k\bar{a} \in R$ Jadi syarat ke-2 terpenuhi.

  Kedua syarat terpenuhi, maka *U* merupakan subruang R^2.

✓ ***Contoh-2***

Misalkan U himpunan semua matriks 2×2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat $a = 0$, dan $d = 0$. Tunjukkan bahwa U merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2×2 pada operasi yang biasa di matriks 2×2!

Penyelesaian :

Karena $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$, maka $U \neq \emptyset$

Aksioma 1:

Ambil $a, b \in U$, akan ditunjukkan bahwa $a + b \in U$. Karena $a \in U$ maka dipenuhi

$a = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dengan syarat $a_1 = 0$ dan $d_1 = 0$, dan oleh karena $b \in U$ maka dipenuhi

$b = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ dengan syarat $a_2 = 0$ dan $d_2 = 0$.

Dengan demikian, $a + b = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ karena $a_1 = 0$ dan $a_2 = 0$ maka $a_1 + a_2 = 0$, dan juga karena $d_1 = 0$ dan $d_2 = 0$ maka $d_1 + d_2 = 0$.

Jadi $a + b \in U$.

Aksioma 2:

Ambil $a \in U$, ambil $k \in R$ dan akan ditunjukkan bahwa $ka \in U$. Karena $a \in U$ maka dipenuhi $a = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dengan syarat

$a_1 = 0$ dan $d_1 = 0$. Maka $\begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}$, berarti $ka_1 = 0$ dan $kd_1 = 0$.

Jadi, $ka \in U$.

Dengan demikian, U merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2×2.

✓ ***Contoh-3***

Misalkan U himpunan semua matriks 2×2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat $ad = 0$. Apakah U subruang dari ruang vektor matriks 2×2 ?

Penyelesaian.

Aksioma 1:

Misal $m_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \in U$ karena $2 \times 0 = 0$ dan $m_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \in U$ karena $0 \times (-4) = 0$

Tetapi $m_1 + m_2 = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \notin U$, dan $2 \times (-4) \neq 0$.

Jadi U bukan subruang dari matriks 2×2 yang didefinisikan pada soal.

✓ ***Contoh-4***

Tentukan apakah himpunan $\{(x_1, x_2, x_3)^T | x_3 = {x_1}^2 + {x_2}^2\}$ merupakan subruang bagian dari R^2 atau bukan?

Penyelesaian.

Misal $U = (U_1, U_2, U_3)$ sebagai $U_3 = {U_1}^2 + {U_2}^2$

$V = (V_1, V_2, V_3)$ sebagai $V_3 = {V_1}^2 + {V_2}^2$

Aksioma 1:

$\alpha U = (U_1, U_2, U_3) = (aU_1, aU_2, aU_3)$

$aU_3 = a({U_1}^2 + {U_2}^2) = (a{U_1}^2 + a{U_2}^2) \notin U$

karena $\neq (aU_1)^2(aU_2)^2$ $atau$ $U_3 \neq {U_1}^2 + {U_2}^2$

Jadi, U bukan subruang bagian dari R^2 yang didefinisikan pada soal.

3.4.3 Subruang dalam Budaya Lampung

Seperti halnya melalui definisi, subruang mempunyai makna subhimpunan dari ruang yang lebih besar. Dalam nuwo sesat, tak hanya bangunan yang terlihat rumah dari tampak depan. Tapi ternyata, nuwo sesat memiliki beberapa ruangan di dalamnya, salah satunya adalah ruang pertemuan.

Gambar 2. Ruang Pertemuan pada Nuwo Sesat

Pada gambar 2 memperlihatkan bahwa nuwo sesat terdapat beberapa ruang. Nuwo sesat termasuk ke dalam salah satu contoh bentuk ruang vektor, dimana ruang yang di dalamnya adalah bagian dari subruang, seperti ruang pertemuan misalnya.

3.5 Kombinasi Linear

Definisi-1

Misalkan V adalah ruang vektor. $S = \{u_1, u_2, u_3\} \subseteq V$. Misalkan pula $a \in V$. Vektor a disebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S jika terdapat skalar-skalar (konstanta real)

$k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$, sehingga memenuhi persamaan $k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n = a$.

Definisi-2

Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah vektor-vektor dalam suatu ruang vektor V. jumlah vektor-vektor berbentuk $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$, di mana $a_1, \dots, a_n$adalah skalar-skalar disebut suatu kombinasi linear dari $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Dalam Al-qur'an diberitahukan mengenai kombinasi terdapat pada Surah Al-Mursalat ayat 1-5, yaitu:

وَالْمُرْسَلَاتِ عُرْفًا ﴿١﴾ فَالْعَاصِفَاتِ عَصْفًا ﴿٢﴾
وَالنَّاشِرَاتِ نَشْرًا﴿٣﴾ فَالْفَارِقَاتِ فَرْقًا ﴿٤﴾ فَالْمُلْقِيَاتِ
ذِكْرًا ﴿٥﴾

Artinya: *"Demi (malaikat-malaikat) yang diutus untuk membawa kebaikan (1). Dan (malaikat-malaikat) yang terbang dengan kencangnya (2). Dan (malaikat-malaikat) yang menyebarkan (rahmat Allah) dengan seluas-luasnya (3). Dan (malaikat-malaikat) yang membedakan (antara yang baik dan yang buruk) dengan sejelas-jelasnya (4). Dan (malaikat-malaikat) yang menyampaikan wahyu (5)."*

Contoh.

Misalkan, $u = [2, -1,3]$, $v = [1,2, -2]$ apakah $x = [8,1,5]$ kombinasi linear dari u dan v?

Penyelesaian.

$[8,1,5] = k_1[2, -1,3] + k_2[1,2, -2]$

Dari kesamaan vektor diperoleh

$2k_1 + k_2 = 8$

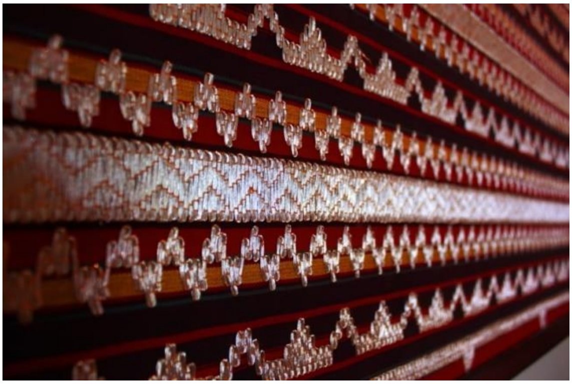
$-k_1 + 2k_2 = 1$

$3k_1 - 2k_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} => \begin{matrix} k_1 = 3 \\ k_2 = 2 \end{matrix}$$

3.5.1 Kombinasi Linear dalam Budaya Lampung

Kain tapis merupakan kain etnik suku Lampung. Kain tapis terbuat dari benang kapas yang ditenun dengan sulaman benang perak atau emas. Guna kain tapis adalah sebagai pelengkap pakaian wanita yang dijadikan sarung untuk menutupi tubuh bagian pinggang ke bawah. Ada juga yang membuatnya menjadi selendang.



Gambar 3. Kain Tapis

Pada gambar 3, motifnya berhias tajuk besarung (pucuk rebung) dengan motif belah ketupat dibuat teratur, mengkombinasikan setiap benang menjadi bentuk yang skalar atau tak berubah sampai proses selesai. Kain tapis ini biasa dipakai oleh pengantin wanita.

3.6 Membangun Linear dan Kebebasan Linear

3.6.1 Definisi Membangun Linear

Definisi membangun linear/merentang/rent/span yaitu misalkan V adalah ruang vektor. $S = \{u_1, u_2, \dots u_r\} \subseteq V$. S disebut membangun/himpunan perentang *V*, jika disetiap vektor di *V* tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear.

Dapat ditulis $W = rent\ (s)$ atau $W = rent\ \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ dari S. Dapat juga dilihat jika $(A) = p(A/B) = n$, maka W mempunyai kombinasi linear.

3.6.2 Definisi Kebebasan Linear

Apabila $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ adalah himpunan vektor, *S* dikatakan bebas linear bilamana kombinasi linear:

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_n u_n = 0$$

Penyelesaiannya adalah trivial yakni $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$. Jika ada penyelesaian lain *(nontrivial)*, maka *S* dikatakan tak bebas linear.

3.7 Basis dan Dimensi

3.7.1 Basis

Definisi-1

Andaikan *V* adalah sembarang ruang vektor dan $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ adalah himpunan berhingga vektor-vektor pada *V, S* dikatakan basis untuk ruang *V* jika:

- *S* bebas linear
- *S* membangun *V*

Teorema-1

Jika $\{v_1, v_2, v_3, \dots., v_n\}$ adalah himpunan yang merentang suatu ruang vektor V, maka himpunan sembarang dari m vektor di V, dimana $m > n$ adalah bergantung linear.

Definisi-2

Misalkan V adalah ruang vektor. Jika V memiliki basis yang terdiri dari n vektor, maka kita katakana bahwa V memiliki dimensi n. Ruang bagian (0) dari V dikatakan memiliki dimensi 0. V diakatakan memiliki dimensi hingga jika terdapat himpunan berhingga vektor yang merentang V, jika tidak demikian halnya, maka kita katakan bahwa V memiliki demensi tak hingga.

Teorema-2

Jika V adalah ruang vektor dengan dimensi $n > 0$;

- *Sembarang himpunan n vektor bebas linear merentang V*
- *Sembarang n vektor yang merentang V adalah bebas linear.*

Teorema-3

Jika *V* merupakan suatu ruang vektor berdimensi $n > 0$, maka

- Tidak ada himpunan dengan jumlah vektor yang lebih kecil dari m dapat merentang V.
- Semua subhimpunan yang lebih sedikit dari n vektor yang lebih bebas linear dapat diperluas untuk membentuk basis dari V.
- Sembarang himpunan perentang yang terdiri lebih dari n vektor dapat dikecilkan untuk membentuk basis dari V.

Dengan kata lain, suatu basis adalah perampatan ruang vektor dari suatu system koordinat dalam ruang berdimensi 2 dan ruang berdimensi 3.

Teorema berikut ini akan membantu kita melihat mengapa hal tersebut demikian.

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots \dots, v_n\}$ adalah suatu basis untuk suatu ruang vektor V, maka setiap vektor v dalam V bisa dinyatakan dalam bentuk $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ dalam tepat satu cara.

3.7.2 Dimensi

Definisi

Sebuah ruang vektor dikatakan berdimensi berhingga, jika ruang vektor *V* mengandung sebuah himpunan berhingga vektor $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ yang membentuk basis. Dimensi sebuah ruang vektor *V* yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyaknya vektor pada basis *V.*

Teorema-1

Jika V adalah suatu ruang vektor berdimensi terhingga dan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah sebarang basis, maka:

- ❖ Setiap himpunan dengan lebih dari n vektor adalah tak-bebas secara linear.
- ❖ Tidak ada himpunan dengan vektor yang kutang dari n yang merentang V.

Teorema-2

Semua basis untuk suatu ruang vektor berdimensi terhingga mempunyai jumlah vektor yang sama.

Teorema-3 (teorama plus/minus)

Anggap S adalah himpunan vektor tak-kosong dalam suatu ruang vektor S.

- ❖ Jika S adalah himpunan yang bebas secara linear, dan jika v adalah suatu vektor dalam V yang berada diluar rentang (S), maka himpunan $S \cup \{v\}$ yang dihasilkan dengan menyelipkan v ke S tetap bebas secara linear.
- ❖ Jika v adalah suatu ruang vektor dalam S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lain dalam S, dan jika $S - \{v\}$ menyatakan himpunan yang diperoleh dengan memindahkan $v\ dari\ S$, maka S dan $S - \{\ v\}$ merentangkan ruang yang sama; yaitu,

$$rent(S) = rent(S - \{v\})$$

Teorema-4

Jika V adalah suatu ruang vektor berdimensi n, dan jika S adalah suatu himpunan dalam V dengan tepat n vektor, maka S adalah suatu basis untuk V atau S bebas secara linear.

Catatan:

Suatu himpunan vektor dapat ditunjukkan merupakan himpunan bebas linear atau membangun ruang vektor *V* hanya dengan melihat dari jumlah vektor dan dim ruang vektor. Jika terdapat ruang vektor dengan banyaknya vektor = 3 dan dim (R^2) = 2, sebenarnya tanpa menghitung kita sudah bisa menyimpulkan bahwa himpunan vektor tersebut tidak bebas linear karena agar bebas linear maksimal jumlah vektor = dim ruang vektor. Sebaliknya jika suatu himpunan vektor hanya memuat vektor dengan jumlah kurang dari dim ruang vektor, maka dapat disimpulkan bahwa himpunan vektor tersebut tidak membangun.

Berdasarkan ini, maka suatu himpunan vektor kemungkinan bisa menjadi basis ruang vektor berdimensi n jika jumlah vektornya $= n$. Jika jumlah vektor $< n$, maka tidak membangun sebaliknya jika jumlah vektor $> n$ maka bergantung linear.

Jika jumlah vektor $= n$, maka dapat dihitung nilai determinan dari ruang yang dibangun oleh himpunan vektor tersebut.

- *Jika det = 0, maka tidak bebas linear dan tidak membangun.*
- *Jika det ≠ 0, maka bebas linear dan membangun sehingga merupakan basis.*

LATIHAN

1. Jika S adalah semua himpunan dari vektor di R^3 yang berbentuk (x_1, x_2, x_3) dengan syarat $x_3 = ({x_1}^2 + {x_2}^2)$. Tentukan apakah S merupakan subruang vektor atau bukan?
2. Tentukan apakah himpunan $S = \{(x_1, x_2)^T\}$ dengan syarat $x_1 = 3x_1 + 1$ merupakan subruang dari R^2 atau bukan?
3. Tunjukkan subruang dari ruang vektor yang sesuai atau berikan contoh penyangkal yang menyatkan subruang berangkutan bukan subruang. Misalkan U himpunan semua vektor di R^3 yang mempunyai bentuk $u = (u_1, u_2, u_3)$, dengan syarat $u_2 + u_3 = 0$.
4. Apakah vektor-vektor pada bidang 3x+2y-z=0, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari S= $\{a_1 = (2{,}0{,}3),\ a_2 = (0{,}1{,}2)\}$? Jelaskan!

5. Apakah polinom $3 + \mathrm{x} + 2x^2$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $S\{p_1 = 2 + 3x^2,\ p_2 = -1 + x + 3x^2,\ p_3 = 3 + x + 9x^2\}$
6. Nyatakan matriks $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari $S = \left\{m_1 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\ m_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\ m_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$

BAB 2
RUANG HASIL-KALI DALAM

4.1 Definisi Ruang Hasil-Kali Dalam

Sebuah hasil kali dalam pada ruang vektor riil *V* adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ dengan masing-masing pasangan vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ pada *V* sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut.

- ❖ $[u, v] = [v, u]$ (aksioma simetri)
- ❖ $[u + v, w] = [u, w] + [v, w]$ (aksioma penambahan)
- ❖ $[ku, v] = k[u, v]$ (aksioma kehomogenan)
- ❖ $[u, u] \geq 0$ dan $[u, u] = 0 \leftrightarrow u = 0$ (aksioma kepositifan)

Gambar 4. Tapis Kaca

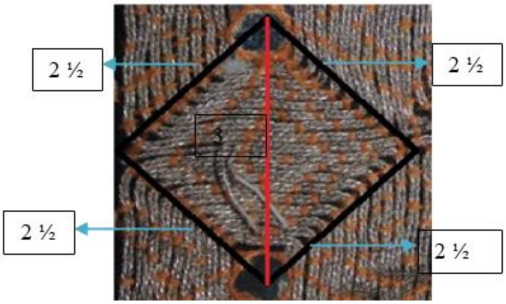
Gambar 5. Tapis Raja Tunggal

Gambar 6. Tapis Jung Sarat

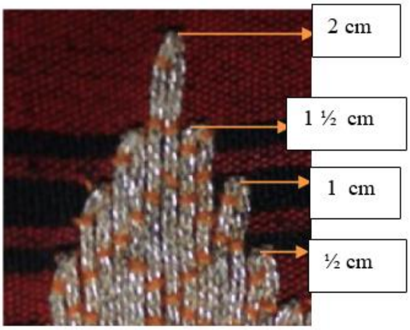
Gambar 7. Tapis Gajah Maghem

Pada gambar 4, 5, 6, dan 7 berlaku aksioma ruang hasil-kali dalam, ada simetri, penambahan, dan kehomogenan. Suku Lampung mempunyai berbagai macam bentuk motif pada kain yang sering digunakan di acara adat. Kain tersebut dinamakan dengan kain tapis. Masyarakat Lampung pada zaman dahulu ketika proses pembuatan kain, tidak mengukur dengan ukuran khusus. Namun, kesimetrisannya tetap terjaga.

Bahan dasar yang dibutuhkan tapis kaca adalah panjang 140 cm, lebar 72 cm dengan 900 gram berat benang emas, tapis raja tunggal membutuhkan bahan dasar dengan panjang 112 cm, lebar 64,5 cm dengan 500 gram berat benang emas, tapis jung sarat membutuhkan bahan dasar dengan panjang 110 cm, lebar 64 cm dengan 1000 gram berat benang emas, pembuatan tapis gajah meghem membutuhkan bahan dasar dengan panjang 130 cm, lebar 80 cm dengan 500 gram berat benang emas. Motifnya membentuk suatu pola bilangan yang sesuai dengan kesimetrian dalam matematika.



Gambar 8. Motif Belah Ketupat



Gambar 9. Motif Pucuk Rebung

Pada gambar 8 (motif belah ketupat), terlihat jelas kesimetrisan motifnya. Begitupun pada gambar 9 (motif pucuk rebung). Setiap pola pada benangnya memiliki jarak yang sama. Semua motif pada kain tapis tak hanya bentuknya yang simetris dan pola beraturan. Dibalik itu semua, ternyata mempunyai makna tersendiri. Seperti pada motif pucuk rebung yang memiliki makna hubungan keluarga yang tidak dapat dipisahkan untuk saling tolong menolong serta saling menjaga silaturahmi.

Gambar 10. Nuwo Sesat

Gambar 11. Lamban Pesagi

Pada gambar 10, 11 merupakan contoh lain yang ada di Lampung. Selain kain tapis, suku Lampung juga memiliki rumah adat. Rumah adat Lampung memiliki arsitektur yang hampir sama dengan rumah-rumah adat lainnya yang ada di pulau Sumatera. Rumah adat dengan nama nuwo sesat ini, memiliki bangunan berbentuk rumah panggung bertiang yang bahan bangunannya sebagian besar terbuat dari kayu. Setiap sisinya terdapat kehomogenan. Tampak depan terlihat memiliki dua posisi tangga yaitu sebelah kanan dan kiri. Setiap tangga memiliki jumlah anak tangga yang sama. Begitu pula pada sisi yang lainnya memiliki ornamen yang khas.

Sifat dasar Ruang Hasil Kali Dalam

Jika *v* adalah sebuah vektor di dalam sebuah ruang hasil kali dalam V, panjang atau norma dari v diberikan oleh

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}$$

Dua vektor *u* dan *v* dikatakan *orthogonal,* jika $(u, v) = 0$

Teorema

Jika u dan v adalah vektor-vektor ortogonal di dalam sebuah ruang hasil kali dalam dalam V, maka

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Bukti

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v. v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2\end{aligned}$$

- ***Contoh***

  Untuk $u, v \in M_{2\times 2}$ didefinisikan operasi bernilai real berikut.

  $$\begin{aligned}< u, v > &= < \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix} > \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4.\end{aligned}$$

  Apakah operasi ini merupakan hasil kali dalam?

  Penyelesaian.

  1. Ambil $a, b \in M_{2 \times 2}$ misalkan $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, maka

     $< a, b > = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$

     {*komutatif perkalian bilangan real*}

$< a, b > = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 + b_4 a_4$

{*definisi operasi* <u, v>}

$< a, b > = < b, a >$

2. Ambil a, b, c ϵ $M_{2 \times 2}$ misalkan $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$,

   $c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$, maka

$< a + b, c > = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 + (a_4 + b_4)c_4$

{*distributif bilangan real*}

$$< a, b, c > = a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + a_3c_3 + b_3c_3 + a_4c_4 + b_4c_4$$

{*asosiatif bilangan real*}

$< a, b, c > = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_4) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4)$

{*definisi operasi* <u, v>}

3. Ambil a, b, c ϵ $M_{2 \times 2}$ misalkan $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$,

   ambil $k \epsilon R$ maka

$$< ka, b > = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 + (ka_3)b_3 + (ka_4)b_4$$

{*distributif bilangan real* }

$$< ka, b > = k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)$$

{*definisi operasi* <u, v>}

$$< ka, b > = k < a, b >$$

4. Ambil a ϵ $M_{2 \times 2}$, misalkan a = $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, maka

$$< a, a > = a1a1 + a2a2 + a3a3 + a4a4 \geq 0$$

{*sifat kuadrat bilangan real*}

dan $< a, a > = 0$, jika $a1 = 0$, $a2 = 0$, $a3 = 0$, $a4 = 0$, atau *a* = 0.

Jadi, operasi bernilai real diatas merupakan hasil-kali dalam.

4.2 Panjang Vektor, Jarak Antar Vektor Dan Besar Sudut RHKD

Ketika kita membahas tentang panjang vektor, maka kita harus menghilangkan rumusan yang selama ini yang kita gunakan mengenai panjang vektor dalam ruang–*n Euclides* berdasarkan operasi hasil kali titik. Kita akan menghitung panjang suatu berdasarkan hasil kali dalam yang telah diberikan, dan sudah dibukikan bersama-sama bahwa hasil sebelumnya kali titik ruang dalam ruang–*n Euclides* juga merupakan hasil kali dalam jadi konsep yang digunakan ini akan lebih luas dari pada sebelumnya.

Kali titik dalam ruang–n Euclides juga merupakan hasil kali dalam jadi konsep yang digunakan ini akan lebih luas dari pada konsep yang sebelumnya. Misalkan V merupakan ruanghasil kali dalam, $\bar{u}\bar{v}$ elemen V maka;

a. Panjang $\bar{u} =< \bar{u}, \bar{u} >^{\frac{1}{2}}$

b. Jarak $\bar{u}\ dan\ \bar{v},\ d(\bar{u},\bar{v}) =< \bar{u} - \bar{v} >^{\frac{1}{2}}$

c. Misalkan Ø sudut $\bar{u}\ dan\ \bar{v}$ dalam RHD, maka besar cos Ø adalah $\cos \emptyset = \frac{<\bar{u},\bar{u}>}{\|u\|\|v\|}$

   Jika $\bar{u}\ dan\ \bar{v}$ saling tegak $\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 =$ lurus maka$\|u\|^2$

Bukti,

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 =< \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v} >$$
$$=< \bar{u} + \bar{v}, \bar{u}, \bar{u} + \bar{v}, \bar{v} >$$
$$=< \bar{u}, \bar{u} >=< \bar{v}, \bar{v} > +2 < \bar{u},\bar{v} >$$
$$= \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$$

✓ ***Contoh:***

Terhadap hasil-kali dalam $< u, v > = 2u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + 3u_4v_4$ dan diberikan; $u = (0, 2,2)$ dan $v = (3, 2, 1)$, hitung:

a. Panjang u dan panjang v,

b. Jarak antara u dan v,

c. Kosinus sudut antara u dan v.

Penyelesaian.

a. Panjang u

$$\|u\| = < u, u >^{\frac{1}{2}}$$
$$= (2.0.0 + 2.2 + 3.2.2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (4 + 12)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 4$$

Panjang v

$$\|v\| = < v, v >^{\frac{1}{2}}$$
$$= (2.3.3 + 2.2 + 3.1.1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (2.3.3 + 2.2 + 3.1.1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 5$$

b. Jarak antara *u* dan *v*

$$v = \|u - v\|$$
$$= < u - v, u - v >^{\frac{1}{2}}$$
$$= < (-3, 0, 1), (-3,0,1) >^{\frac{1}{2}}$$
$$= (2(-3)(-3) + 0.0 + 3.1.1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{21}$$

c. Kosinus sudut antara *u* dan v

$$\cos\theta = \frac{2.0.3 + 2.2 + 3.2.1}{4.5}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Dalam contoh soal di atas, panjang *u* adalah 4 tetapi jika menggunakan hasil-kali dalam *Euclides* akan didapatkan $\|u\| = 2\sqrt{2}$. Oleh karena itu, dengan didefinisikannya hasil-kali dalam ini maka panjang, sudut, dan jarak menjadi relatif terhadap hasil-kali dalam yang digunakan.

Definisi-1

Misalkan *V* ruang hasil-kali dalam dan misalkan $u, v \in V$. *U* dan *v* disebut saling ortogonal jika $< u, v > = 0$.

Dari hasil perhitungan ini bahwa terlihat u dan v hanya ortogonal terhadap hasil-kali dalam pada bagian (*a*) dan (*c*) tetapi tidak ortogonal terhadap hasil-kali dalam pada bagian (*b*). Oleh Karena itu, keortoganalan dua vektor tergantung pada hasil-kali dalam yang berlaku di dalam ruang hasil-kali dalam tersebut.


Gambar 12. Nuwo Sesat

Pada gambar 11 merupakan salah satu contoh bangunan bidang ortogonal yaitu rumah adat lampung. Jika rumah tidak ortogonal, maka bangunan tidak akan berdiri kokoh. Tiang-tiang penyangga dari bangunan ini juga memiliki ukiran-ukiran. Seiring dengan perkembangan zaman, tiang kayu penyangga pada rumah adat Nuwo Sesat ini sering kali diganti dengan batu bara atau beton cor.

Definisi-2

Misalkan *V* ruang hasil kali dalam dan misalkan $W = (u1, u2, \dots, un) \subseteq V$. Vektor $v \in V$ disebut orthogonal pada himpunan *W* jika v ortogonal pada setiap anggota *W* atau untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ berlaku $< u, v > = 0$.

- ✓ ***Contoh***

  Apakah $u = (2, -1, 0)$ ortogonal terhadap himpunan $W = \{a = (2, 2, 3),\ b = (3, 3, -1),\ c =$

$(-4,-4,3)\}$ terhadap hasil kali dalam $< p,q >= p_1q_1 + 2p_2q_2 + p_3q_3$?

Penyelesaian.

$$< u,a >= 2.2 + 2(-1)2 + 0.3 = 0.$$
$$< u,b >= 2.3 + 2(-1)3 + 0(-1) = 0.$$
$$< u,c >= 2(-4) + 2(-1)(-4) + 0.3 = 0.$$

Jadi, u ortogonal terhadap himpunan *W*.

Definisi-3

Misalkan, *V* ruang hasil kali dalam dan $W = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$. *W* disebut himpunan ortogonal jika setiap dua anggota *W* yang berbeda saling orthogonal, atau $< ui, uj >= 0$, untuk setiap *i ≠ j*, dengan *i, j* = 1, 2, ... , *n.*

✓ ***Contoh***

Apkah $W = \{a = (-1,0,3),\ b = (2,1,1),\ c = (1,-7,\frac{1}{2})\}$ merupakan himpunan ortogonal terhadap hasil kali dalam $< u,v >= 3u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3$?

Penyelesaian.

$$< a,b >= 3(-1)2 + 0.1 + 2.3.1 = 0.$$
$$< a,c >= 3(-1) + 0(-7) + 2.3.1/2 = 0$$
$$< a,c >= 3.2.1 + 1(-7) + 2.1.1/2 = 0.$$

Jadi, himpunan *W* himpunan ortogonal.

4.3 Basis Orthonormal

Diketahui V ruang hasil kali dalam dan $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ adalah vektor-vektor dalam V. Beberapa definisi penting;

1. H = $\{\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ disebut himpunan orthogonal bila setiap vektor dalam V saling tegak lurus, yaitu $< \bar{v}_i\bar{v}_j >= 0$ untuk i ≠ j dan i,j = 1,2,...,n.

2. G = $\{\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ disebut himpunan orthonomal bila G himpunan orthonomal
3. Norm dari $\bar{v}_1 = 1, i = n\ atau\ < \bar{v}_i, \bar{v}_j >= 1$

LATIHAN

1. Diketahui $< \bar{a}, b \geq a_1b_1 + {a_1}^2 + {b_1}^2$ dengan $\bar{a} = (a_1, a_2)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2)$. Tunjukan sifat hasil kali dalam yang tidak dipenuhi!
2. Diketahui $< \bar{a}, \bar{b} \geq a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3$ dengan $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Periksa apakah $< \bar{a}, \bar{b} >$merupakan hasil kali dalam atau tidak? Jika tidak, tentukan aksioma mana yang tidak terpenuhi!
3. *R*^{3} merupakan *RHKD* yang hasil kali dalam $< \bar{u}, \bar{v} >= u_1v_1 - 2u_2v_2 + u_3v_3$ dengan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. W adalah sub ruang R^3 yang memiliki basis $B = \{(-2,2,2), (1,3,-3)\}$
   a. Transformasikan B menjadi basis orthonomal
   b. Misalkan $\bar{x} = (2,2,4)$ di R^3, nyatakan $\bar{x} = \bar{y} + \bar{x}$ dengan $\bar{y} \in W$ dan $\bar{z}$ orthogonal terhadap W
4. Diketahui R^3 merupakan RHKD dengan hasil kali dalam $< \bar{u}, \bar{v} = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3$ dengan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. W adalah sub ruang R^3 yang memiliki basis $C = \{b_1 = (-1, 0, -1), b_2 = (2,1,2)\}$!
   a. Hitung $\sin \beta\ jika\ \beta$ adalah sudut $b_1\ dan\ b_2$!
   b. Tentukan jarak antara $b_1\ dan\ b_2$!
   c. Misalkan $\bar{x} = (1,2,-1)\ di\ R^3, \bar{y}\ dan\ \bar{z}$ adalah komponen dari $\bar{X}$ dengan $\bar{y} \in W\ \bar{y}$ dan orthogonal terhadap W, tentuk an $\bar{y}\ dan\ \bar{z}$!
5. Diketahui $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan matriks transisi dari basis A terhadap basis B, dengan $A = \{u_1, u_2,\}\ dan\ B = \{v_1, v_2,\}$ merupakan basis R^2. Jika $\bar{x} = 2u_1,\ u_2$. Tentukan $[\bar{x}]B$!

BAB 3
RUANG EIGEN

5.1 Nilai Eigen

Diketahui A matriks berukuran $n \times n, \bar{x}$ vektor tak-nol berukuran $n \times 1, \bar{x} \in Rn$. Karena A berukuran $n \times n$, maka $A\bar{x}$ akan berubah vektor yang berukuran $n \times 1$ juga. Bila terdapat skalar λ, $\lambda \in Riil$ sedemikian hingga $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ ($A\bar{x}$ menghasilkan vektor yang besarnya λ kali $\bar{x}$). Semua nilai λ yang memenuhi persamaan tersebut sehingga ada nilai $\bar{x}$ yang nyata (bukan vektor $\bar{0}$ saja) disebut nilai *eigen* (karakteristik).

Untuk menentukan nilai λ , dari persamaan $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ sebelumnya dirubah dahulu menjadi persamaan $(A - \lambda I)\,\bar{x} = \bar{0} = (\lambda I - A)\,\bar{x}$. Agar persamaan tersebut memiliki penyelesaian tak-trivial (sejati), maka dapat ditentukan melalui nilai det $(A - \lambda I)$ yaitu $det(A - \lambda I) = det\,(\lambda I - A) = 0$. Persamaan $det\,(A - \lambda I) = det(\lambda I - A) = 0$ ini disebut persamaan karakteristik. Banyaknya nilai eigen maksimal adalah n buah.

Dari nilai eigen yang diperoleh tersebut dapat ditentukan ruang solusi untuk $\bar{x}$ dengan memasukkan nilai eigen yang diperoleh kedalam persamaan $(A - \lambda I)\,\bar{x} = \bar{0}$. Ruang solusi yang diperoleh dengan cara demikian ini disebut juga dengan ruang eigen. Dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tertentu.

Menurut Steven J. Leon misalkan A adalah suatu matriks $n\ x\ n$. Skalar λ disebut sebagai suatu nilai eigen atau nilai karakteristik *(characteristic value)* dari A jika terdapat suatu vektor tak-nol x, sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor x disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari λ.

Dalam Al-qur'an diberitahukan mengenai nilai eigen yang terdapat pada Surah Al-Hujaraat ayat 13, yaitu:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ

Artinya:*"Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal".*

Definisi nilai eigen dapat disimpulkan menjadi, suatu nilai yang merepresentasikan matriks A di **ruang yang lain**. Ayat di atas menjelaskan bahwa Allah telah menciptakan manusia dari pasangan laki-laki dan perempuan, kemudian dari pasangan tersebut lahir pasangan-pasangan lainnya. Maka dari itu, pada hakekatnya, manusia adalah satu keluarga.

Matriks A ditransformasi oleh matriks x. Kemudian λ ditransformasi oleh matriks x. Ternyata setelah ditransformasi, keduanya sama. Dengan fakta ini, λ disebut nilai karakteristik (eigen) karena bisa merepresentasikan A di vektor eigen x. Hal ini berkaitan dengan kandungan surah Al-Hujaraat ayat 13 merupakan bukti bahwa pada dasarnya semua manusia adalah sama yang membedakan hanyalah ketaatannya kepada Allah SWT dan Rasul-Nya.

✓ ***Contoh-1***

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai eigen beserta basis ruang eigennya!

Penyelesaian.

Persamaan karakteristik dari A adalah $det\ (\lambda I - A) = 0$.

$$det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)2\lambda - 2(\lambda - 1)$$

$$= (\lambda - 1)[(\lambda - 1)\lambda - 2]$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda 2 - \lambda - 2)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

Jadi, nilai eigen untuk A adalah : $-1,\ 1,\ 2$. Basis ruang eigen diperoleh dengan memasukkan nilai eigen yang diperoleh ke dalam persamaan $(A - \lambda I)\ \bar{x} = \bar{0}$.

- Untuk $\lambda = -1$

  didapatkan persamaan $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$

  $$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Ruang Eigen $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ -S \\ S \end{bmatrix}$, basis ruang eigen berupa $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Untuk $\lambda = 1$

  didapatkan persamaan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$

  $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ruang Eigen $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix}$, baris ruang eigen berupa $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

- Untuk $\lambda = 2$,

  substitusi nilai $\lambda = 2$ ke persamaan $(\lambda I - C)\, \bar{x} = \bar{0}$

  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bar{X} = \bar{0}$

  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  Ruang eigen $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -2s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$

  Jadi, untuk $\lambda = 2$, ada satu basis ruang eigen yaitu: $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

  Karena hanya ada dua basis ruang eigen yang bebas linear, maka C tidak dapat didiagonalisasi.

✓ ***Contoh-2***

1. Misalkan A = $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan x = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Hitunglah nilai eigen dan vektor eigen!

   Penyelesaian.

   $Ax = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3x$

   Dari persamaan ini terlihat bahwa $\lambda = 3$ adalah nilai eigen dari A dan $x = (2,1)^T$ merupakan vektor eigen dari λ. Sesungguhnya, sembarang kelipatan tak-nol dari x akan menjadi vektor eigen, karena $A\ (\forall(\alpha, x) = \alpha\, Ax = \alpha\, \lambda\, x = \lambda\, (\alpha, x)$

2. A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Hitunglah nilai-nilai eigen dari A dan carilah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian!

Penyelesaian.

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\ \lambda)^2\ +\ 4$

Akar polinom karakteristiknya adalah $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$

$A\ - \lambda_1 I\ =\ \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}\ =\ -2\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

Dari persamaan ini, nampak bahwa $\{(1,\ \mathrm{I}\ )^t\}$ adalah suatu basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 =\ 1\ +\ 2i$

Dengan cara yang serupa,

$A - \lambda_2 I\ =\ \begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix}\ =\ 2\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$

dan $\{(1, -i)^T\}$ adalah basis untuk $N\ (A - \lambda_2 I)$.

5.2 Diagonalisasi orthogonal

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai diagonalisasi orthogonal akan didefinisikan tentang matriks orthogonal. Matriks bujur sangkar P disebut matriks orthogonal bila berlaku $P^t = P^{-1}$.

Matriks A dapat didiagonalisasi secara orthogonal jika terdapat P orthogonal sehingga $P^{-1}\ A\ P\ =\ D$ dengan D adalah matriks diagonal. Berbeda dengan masalah diagonalisasi sebelumnya, maka pada pembahasan kali ini ada sedikit perbedaan tentang matriks yang bisa didiagonalisasi ataukah tidak, yaitu $P^{-1}\ :\ AP\ = D$

$P\ D\ P^{-1}\ =\ A$

$P\ D\ P^t$ = (dari sifat $P^t = P^{-1}$) ....(1)

$(P\ DP^t)^t\ =\ A^t$ (kedua ruas ditransposekan)

$P\ D\ P^t\ \ =\ A$ ....(2)

Dari persamaan 1 dan 2 didapatkan agar A bisa didiagonalisasi secara orthogonal, maka matriks A harus memenuhi sifat $A\ =\ A^t$ (A harus matriks simetri).

Gambar 13. Motif Tapis

Terlihat dari gambar 12 (motif tapis), kesimetrisannya merujuk pada makna matriks simetri. Seperti penjelasan sebelumnya, suatu matriks bisa didiagonalisasi secara orthogonal, tetapi harus memenuhi sifat $A = A^t$ (A harus matriks simetri).

5.3 Menentukan matriks P yang mendiagonalisasi secara orthogonal

Cara menentukan matriks P pada diagonalisasi orthogonal ini sebenarnya hampir sama dengan penentuan *P* pada diagonalisasi sebelumnya yaitu didasarkan pada basis ruang eigen yang telah diperoleh sebelumnya. Misalkan $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ merupakan basis ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_n}$ kemudian $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_n}$ merupakan hasil transformasi dari $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots,$ $\overline{x_n}$ dengan hasil kali dalam Euclides, maka matriks yang mendiagonalisasi secara orthogonal adalah $P = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}]$ sedangkan matriks diagonal *D* sama dengan matriks diagonal *D* pada bahasan sebelumnya.

✓ ***Contoh***

Diketahui A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan matriks yang mendiagonalisasi A secara orthogonal beserta matriks diagonalnya!

Penyelesaian.

Persamaan karakteristik: $det\ (\lambda I - A)\ =\ \bar{0}$.

$$det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 \lambda - \lambda\ =\ \lambda\{\ (\lambda - 1)^2 - 1\ \}$$
$$=\ 0$$

Nilai eigen: 0,2

Untuk $\lambda =\ 0$ subtitusi nilai $\lambda =\ 0$ ke persamaan $(\lambda I - \bar{A})\ =\ \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ruang eigen: $\bar{x}\ = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$

Jadi, untuk $\lambda = 0$ terdapat dua ruang basis ruang eigen: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

LATIHAN

1. Diketahui persamaan $A\bar{x}\ -\ \alpha\bar{x}$, dengan $\bar{x} \in\ R^2$ dan α skalar , tentukan nilai α agar $\bar{x}$ memiliki solusi banyak jika $A\ = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$!
2. Diketahui SPL $\begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a & 1 \\ 0 & 1 & 1 - a \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$
   a. Tentukan nilai agar a SPL memiliki solusi banyak dengan 1 atau 2 parameter!
   b. Tulis solusi SPL dari nilai a didapat!

3. Tentukan nilai eigen dan basis yang bersesuaian dengan nilai eigennya dan matriks-matriks berikut!

a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Diketahui matriks A_{3x3} memiliki nilai eigen 0, 1 dan ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai nilai eigen tersebut adalah (s, $s-t$, t) dan (2s, s, s). Tentukan:
   a. Matriks yang mendiagonalkan *A*
   b. Matriks *A*
5. Diketahui $H = \{(1,0,1), (2,1,0), (0,1,1)\}$ merupakan basis ruang eigen dari nilai eigen -1, 1 dan 2 suatu matriks. Tentukan matriks yang dimaksud!
6. Dari soal nomor 3, tentukan:
   a. Matriks mana saja yang dapat didiagonalkan beserta matriks yang mendiagonalkan!
   b. Matriks mana saja yang dapat didiagonalkan secara orthogonal beserta matriks yang mendiagonalkan secara orthogonal!

DAFTAR PUSTAKA

Departemen Agama Republik Indonesia, *Al-Qur'an dan Terjemahannya* (Surakarta: Pustaka Al-Hanan, 2009).

Dona Dinda Pratiwi, *Aljabar Linear* (Surabaya: CV. Gemilang, 2017).

Howard Anton, *Dasar-Dasar Aljabar Linear* (Batam: Interaksara, 2000).

Howard Anton and Chris Rorres, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*, ed. by Amalia Safitri, ke 8 (Jakarta: Erlangga, 2004).

M. Cholik Adinawan, *Matematika Untuk SMP/MTs Kelas VIII Semester 1* (Jakarta: Erlangga, 2017).

Mahmud 'Imrona, *Aljabar Linear Dasar* (Jakarta: Erlangga, 2012).

Steven Jhon Leon, *Aljabar Linear Dan Aplikasinya* (Jakarta: Erlangga, 2001).

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI RADEN INTAN LAMPUNG
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN
PRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA

Alamat : Jl. Letkol H. EndroSuratmin, Sukarame Bandar Lampung Telp. 0721-780887 fax. 0721780422

SURAT KETERANGAN HASIL SIMILARITY TURNITIN

Berdasarkan Surat Edaran Rektor UIN Raden Intan Lampung nomor 3432/UN.16/R/HK.007/09/2018 tentang Penggunaan Aplikasi Plagiarism Checker Turnitin dalam Penyusunan Karya Ilmiah Dosen dan Mahasiswa di Lingkungan UIN Raden Intan Lampung, maka saya yang bertandatangan dibawah ini :

Nama	: Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd
NIP	: 198906052015031004
NIDN	: 2028028401
Pangkat Golongan	: III D
Prodi	: Pendidikan Matematika
Fakultas	: Tarbiyah dan Keguruan
Jabatan	: Sekretaris Jurusan Pendidikan Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa buku (BAB I – III) dengan judul:

"ALJABAR VEKTOR BERBASIS KEISLAMAN DAN BUDAYA LAMPUNG"

Telah di cek kesamaan (similarity) menggunakan Turnitin dengan hasil kesamaan sebesar 13% (Tiga belas Persen).
Demikian surat keterangan ini dibuat untuk di pergunakan sebagaimana mestinya.

Bandar Lampung, Juli 2024
Yang menyatakan

Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd
NIP. 198906052015031004

*) Coret yang tidak perlu

KEMENTRIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI RADEN INTAN LAMPUNG
PUSAT PERPUSTAKAAN
JL.Letkol H. Endro Suratmin, Sukarame I, Bandar Lampung 35131
Telp.(0721) 780887-74531 Fax. 780422 Website: www.radenintan.ac.id

SURAT KETERANGAN
Nomor: B–2390/ Un.16 / P1 /KT/VII/ 2024

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : **Dr. Ahmad Zarkasi, M. Sos. I**
NIP : 197308291998031003
Jabatan : Kepala Pusat Perpustakaan UIN Raden Intan Lampung
Menerangkan bahwa Artikel Ilmiah dengan judul :

ALJABAR VEKTOR BERBASIS KE ISLAMAN DAN BUDAYA LAMPUNG
Karya

NAMA	NPM	FAKULTAS/PRODI
FANNY IRANDHA	1711050161	FTK/P MTK

Bebas Plagiasi Cek di Prodi dengan tingkat kemiripan sebesar **13%.** Dan dinyatakan **Lulus** dengan bukti terlampir.

Demikian Keterangan ini kami buat, untuk dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Bandar Lampung, 11 Juli 2024
Kepala Pusat Perpustakaan

KEMENTERIAN AGAMA
PUSAT PERPUSTAKAAN
UIN RADEN INTAN
LAMPUNG
REPUBLIK INDONESIA

Dr. Ahmad Zarkasi, M. Sos. I
NIP. 197308291998031003

Ket:
1. Surat Keterangan Cek Turnitin ini Legal & Sah, dengan Stempel Asli Pusat Perpustakaan.
2. Surat Keterangan ini Dapat Digunakan Untuk Repository
3. Lampirkan Surat Keterangan Lulus Turnitin & Rincian Hasil Cek Turnitin ini di Bagian Lampiran Skipsi Untuk Salah Satu Syarat Penyebaran di Pusat Perpustakaan.

FANNY IRANDHA

ORIGINALITY REPORT

13%	11%	8%	8%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	Submitted to Universitas 17 Agustus 1945 Surabaya Student Paper	2%
2	Fiola Cita Dewi, Aida Nurfithriyya, Susiana Susiana, Rosida Rakhmawati, Bambang Sri Anggoro. "ETNOMATEMATIKA EKSPLORASI TAPIS LAMPUNG SEBAGAI SUMBER BELAJAR DALAM UPAYA MELINDUNGI WARISAN BUDAYA LAMPUNG", Journal of Mathematics Education and Science, 2019 Publication	1%
3	Submitted to Universitas Sang Bumi Ruwa Jurai Student Paper	1%
4	Submitted to University of Namibia Student Paper	1%
5	Submitted to Central Queensland University Student Paper	1%
6	Zeth A. Leleury. "SISTEM ORTONORMAL DALAM RUANG HILBERT", BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 2014 Publication	1%
7	Yunan Hu, Olga I. Koroleva, Miroslav Krstić. "Nonlinear control of mine ventilation networks", Systems & Control Letters, 2003 Publication	<1%
8	Submitted to Universitas PGRI Yogyakarta Student Paper	<1%

9	Submitted to UIN Sunan Gunung DJati Bandung Student Paper	<1%
10	Submitted to Higher Education Commission Pakistan Student Paper	<1%
11	Submitted to Arab Open University Student Paper	<1%
12	Dewi Astuti, Helmi, Eka Wulan Ramadhani. "BENTUK KANONIK SMITH PADA MATRIKS POLINOMIAL", Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya, 2019 Publication	<1%
13	Submitted to Universitas Diponegoro Student Paper	<1%
14	Inne Syafrian Putri, Alfina Rifda Anindya, Esih Sukaesih. "Kaitan Ruang Vektor Matriks V_n dan C_n", KUBIK: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika, 2023 Publication	<1%
15	Jens Kunath. "Analytische Geometrie und Lineare Algebra zwischen Abitur und Studium I", Springer Science and Business Media LLC, 2019 Publication	<1%
16	Submitted to Universitas Islam Indonesia Student Paper	<1%
17	Haario, H.. "Asymptotic analysis of a complex reaction scheme in solid-liquid system", Chemical Engineering Science, 200307 Publication	<1%
18	Submitted to South Lake Tahoe High School Student Paper	<1%
19	Submitted to UIN Sultan Maulana Hasanudin Student Paper	

<1 %

20	Chrisanty Y Tambayong, Jullia Titaley, Rinancy Tumilaar. "EKSISTENSI RUANG VEKTOR ATAS LAPANGAN TERHADAP MODUL BEBAS", JURNAL ILMIAH SAINS, 2019 Publication	<1 %
21	Hanoi Pedagogical University 2 Publication	<1 %
22	Sokichi Suzuki. "Dynamical analysis of the low-temperature phase diagram of a cuprate superconductor", Physica Scripta, 2024 Publication	<1 %
23	Pavel Heřman, Ivan Barvík. "Towards proper parametrization in the exciton transfer and relaxation problem. II. Trimer", Chemical Physics, 2001 Publication	<1 %
24	Walter Metzner, Claudio Castellani, Carlo Di Castro. "Fermi systems with strong forward scattering", Advances in Physics, 1998 Publication	<1 %
25	Submitted to Stockton Collegiate International Secondary School Student Paper	<1 %
26	Submitted to Universitas 17 Agustus 1945 Semarang Student Paper	<1 %
27	Submitted to Coventry University Student Paper	<1 %
28	Submitted to Cranfield University Student Paper	<1 %
29	Submitted to Sastruyati Chao Test Account Student Paper	<1 %

30 Submitted to University of Melbourne <1 %
Student Paper

31 Siti Sukrillah. "Tafsir Pendidikan Tauhid Keluarga dalam Qs. al-Baqarah 132-133", MUDARRISA: Journal of Islamic Education, 2015 <1 %
Publication

32 Submitted to Universidad Rey Juan Carlos <1 %
Student Paper

33 Endah Wulantina, Sugama Maskar. "Development of Mathematics Teaching Material Based on Lampungnese Ethomathematics", Edumatica : Jurnal Pendidikan Matematika, 2019 <1 %
Publication

34 Ade Rismayanti, Mariatul Kiftiah, Helmi. "RUANG FUNGSI L^2 SEBAGAI RUANG HILBERT", Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya, 2019 <1 %
Publication

35 Toshio Nakatsu. "Classical open-string field theory: A∞-algebra, renormalization group and boundary states", Nuclear Physics B, 2002 <1 %
Publication

36 Wanpeng Lei, Jun Yin. "Spanning k-Ended Tree in 2-Connected Graph", Axioms, 2023 <1 %
Publication

37 A. Saha, D. Dutta, S. Kar, P. Majumder, A. Paul. "Chapter 1: Linear Algebra", Walter de Gruyter GmbH, 2023 <1 %
Publication

38 Atkins, Peter, de Paula, Julio, Keeler, James. "Atkins Physical Chemistry V1", Atkins Physical Chemistry V1, 2022 <1 %

Publication

39	Nina Nina, Agusman Sahari, Resnawati Resnawati. "OPTIMALISASI KEBUTUHAN GIZI HARIAN IBU MENYUSUI DENGAN BIAYA MINIMUM MENGGUNAKAN METODE SIMPLEKS", JURNAL ILMIAH MATEMATIKA DAN TERAPAN, 2016 Publication	<1 %
40	Oliva, A.. "Effect of high shear rate on stability of proteins: kinetic study", Journal of Pharmaceutical and Biomedical Analysis, 20030919 Publication	<1 %
41	Zhongjun Qu, Pierre Perron. "Estimating and Testing Structural Changes in Multivariate Regressions", Econometrica, 2007 Publication	<1 %
42	Himmatul Mursyidah. "ALGORITMA POLINOMIAL MINIMUM UNTUK MEMBENTUK MATRIKS DIAGONAL DARI MATRIKS PERSEGI", AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika, 2017 Publication	<1 %
43	Hossein Mehri-Dehnavi, Ali Mostafazadeh. "Geometric phase for non-Hermitian Hamiltonians and its holonomy interpretation", Journal of Mathematical Physics, 2008 Publication	<1 %
44	Mohammad Fauzan Ni'ami. Nizham Journal of Islamic Studies, 2022 Publication	<1 %
45	Septian Pirade, Tohap Manurung, Jullia Titaley. "Integral Riemann-Stieltjes Pada Fungsi Bernilai Real", d'CARTESIAN, 2017 Publication	<1 %

46	Xiao-Min Li. "GPS carrier phase measurement method based on data transition detection in high dynamic circumstance", WCC 2000 - ICCT 2000 2000 International Conference on Communication Technology Proceedings (Cat No 00EX420) ICCT-00, 2000 Publication	<1 %
47	Hanoi National University of Education Publication	<1 %
48	Submitted to UIN Raden Intan Lampung Student Paper	<1 %

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 5 words
Exclude bibliography	On		