BEDAH DETERMINAN MATRIKS

SOAL DAN PEMBAHASAN SUPER LENGKAP

Buku *"Bedah Determinan Matriks: Soal dan Pembahasan Lengkap"* mengajak pembaca untuk memahami secara mendalam konsep dan aplikasi dari determinan matriks. Buku ini dirancang khusus untuk memenuhi kebutuhan mahasiswa, akademisi, dan siapa pun yang tertarik memperdalam pemahaman mereka tentang aljabar linear.Dalam buku ini, pembaca akan dibimbing melalui serangkaian soal-soal yang dirancang untuk menguji pemahaman mereka tentang determinan matriks. Soal-soal tersebut mencakup berbagai tingkat kesulitan, dari yang dasar hingga kompleks, sehingga pembaca dapat mengasah kemampuan mereka secara bertahap.Setiap soal disertai dengan pembahasan yang komprehensif dan terperinci. Pembahasan tersebut tidak hanya menjelaskan langkah-langkah penyelesaian, tetapi juga memberikan wawasan mendalam mengenai konsep-konsep teoritis yang mendasarinya. Ini memungkinkan pembaca untuk tidak hanya menguasai teknik penyelesaian soal, tetapi juga memahami mengapa dan bagaimana konsep-konsep tersebut bekerja.

Penerbit LADUNY ALIFATAMA
Anggota IKAPI
Jl. Ki Hajar Dewantara No. 49, Kota Metro – Lampung.
Telp. 085269181545 - 0811361113

ISBN: 978-623-489-190-4

BEDAH DETERMINAN MATRIKS SOAL DAN PEMBAHASAN SUPER LENGKAP

LADUNY
Maju bersama ilmu

BEDAH DETERMINAN MATRIKS

SOAL DAN PEMBAHASAN SUPER LENGKAP

Haya Nadirah Kharisma
Dona Dinda Pratiwi, M.Pd.
Farida, S.Kom., MMSI

BEDAH DETERMINAN MATRIKS

SOAL DAN PEMBAHASAN SUPER LENGKAP

Haya Nadirah Kharisma
Dona Dinda Pratiwi, M.Pd.
Farida, S.Kom., MMSI

BEDAH DETERMINAN MATRIKS

SOAL DAN PEMBAHASAN SUPER LENGKAP

Haya Nadirah Kharisma
Dona Dinda Pratiwi, M.Pd.
Farida, S.Kom., MMSI

BEDAH DETERMINAN MATRIKS

SOAL DAN PEMBAHASAN SUPER LENGKAP

Penulis :
Haya Nadirah Kharisma
Dona Dinda Pratiwi, M.Pd.
Farida, S.Kom., MMSI

Desain Cover
Team Laduny Creative

Lay Out
Team Laduny Creative

ISBN : 978-623-489-190-4
16 x 24 cm; vi + 35 Hal
Cetakan Pertama, Juli 2024

Dicetak dan diterbitkan oleh:
CV. LADUNY ALIFATAMA
Jl. Ki Hajar Dewantara No. 49 Iringmulyo, Metro – Lampung.
Telp. 0725 (7855820) – 085269181545
Email: ladunyprinting@gmail.com

ABSTRAK

Buku “Bedah Determinan Matriks : Soal dan Pembahasan Super Lengkap” mengajak pembaca untuk memahami secara mendalam konsep dan aplikasi dari determinan matriks. Buku ini dirancang khusus untuk memenuhi kebutuhan mahasiswa, akademisi, dan siapa pun yang tertarik memperdalam pemahaman mereka tentang aljabar linear.

Dalam buku ini, pembaca akan dibimbing melalui serangkaian soal-soal yang dirancang untuk menguji pemahaman mereka tentang determinan matriks. Soal-soal tersebut mencakup berbagai Tingkat kesulitan, dari yang dasar hingga kompleks, sehingga pembaca dapat mengasah kemampuan mereka secara bertahap. Setiap soal disertai dengan pembahasan yang terperinci dan komprehensuf. Pembahasan tersebut tidak hanya menjelaskan Langkah-langkah penyelesaian, tetapi juga memberikan wawasan mendalam mengeneai konsep-konsep teoritis yang mendasarinya. Ini memungkinkan pembaca untuk tidak hanya menguasai Teknik penyelesaian soal, tetapi juga memahami mengapa dan bagaimana konsep-konsep tersebut.

ABSTRACT

The book "Dissection of Matrix Determinants: Super Complete Questions and Discussion" invites readers to understand in depth the concept and application of matrix determinants. This book is specifically designed to meet the needs of students, academics, and anyone interested in deepening their understanding of linear algebra.

In this book, readers will be guided through a series of questions designed to test their understanding of matrix determinants. These questions cover various levels of difficulty, from basic to complex, so that readers can hone their skills gradually. Each question is accompanied by a detailed and comprehensive discussion. This discussion not only explains the steps for solving it, but also provides in-depth insight into the underlying theoretical concepts. This allows readers to not only master the technique of solving questions, but also understand the why and how of these concepts.

<u>**SURAT PERNYATAAN KEASLIAN KARYA**</u>

Yang bertandatangan di bawah ini :

Nama	: Haya Nadirah Kharisma
Alamat	: Desa Sabah Balau, Tanjung Bintang, Lampung Selatan
Nik	: 1802075701990003
Telp./HP	: 089632671669

menyatakan dengan sesungguhnya, bahwa :

Judul	: Bedah Determinan Matriks : Soal dan Pembahasan Super Lengkap
Penulis	: Haya Nadirah Kharisma Dona Dinda Pratiwi, M.Pd. Farida, S.Kom., MMSI.
Editor	: Dona Dinda Pratiwi, M.Pd.

adalah benar merupakan karya asli yang dibuat untuk diterbitkan dan disebarluaskan secara umum, melalui :

Penerbit	: Laduny Alifatama
Alamat	: Jl. Ki Hajar Dewantara No. 49 Iringmulyo, Metro –Lampung. Telp. 0725 (7855820) – 085269181545 Email: ladunyprinting@gmail.com

Demikian surat ini dibuat dengan sebenar-benarnya serta akan menjadi pertanggungjawaban kami jika terdapat penyalahgunaan dan akibat yang ditimbulkannya.

Metro, 27 Juni 2024

<u>Penanggung jawab Penerbit,</u>	<u>Penulis,</u>
LADUNY Maju Karena Ilmu	SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 73632ALX191241340
Joni Wuryanto, M.Pd.	(Haya Nadirah Kharisma)

KEMENTERIAN AGAMA
UIN RADEN INTAN LAMPUNG
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN
Alamat : Jl. Let. Kol. H. Endro Suratmin Sukarame 1Bandar Lampung 35131 Telp(0721)703260

PERSETUJUAN

Judul Skripsi : **Bedah Determinan Matriks : Soal dan Pembahasan Super Lengkap**
Nama : **Haya Nadirah Kharisma**
NPM : **1711050167**
Fakultas : **Tarbiyah dan Keguruan**
Jurusan : **Pendidikan Matematika**

MENYETUJUI

Untuk di Munaqosyahkan dan dipertahankan dalam sidang Munaqosyah Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Raden Intan Lampung

Pembimbing I	Pembimbing II
Farida, S.Kom., MMSI	**Dona Dinda Pratiwi, M.Pd.**
NIP. 197801282006042002	**NIP. 199004102015032004**

Mengetahui,
Ketua Prodi Pendidikan Matematika

Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd
NIP. 198402282006041004

KEMENTERIAN AGAMA
UIN RADEN INTAN LAMPUNG
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN
Alamat : Jl. Let. Kol. H. Endro Suratmin Sukarame 1Bandar Lampung 35131 Telp(0721)703260

PENGESAHAN

Skripsi dengan judul **"Bedah Determinan Matriks : Soal dan Pembahasan Super Lengkap"** disusun oleh: **Haya Nadirah Kharisma**, NPM: **1711050167**, Program Studi: **Pendidikan Matematika**, telah diujikan dalam sidang Munaqosyah di Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Raden Intan Lampung pada Hari/Tanggal : Kamis, 27 Juni 2024, Pukul 15.01-17.00 WIB. Tempat : Ruang Sidang PSPM.

TIM MUNAQASAH SKRIPSI

Ketua : **Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd.** (..................)

Sekretaris : **Arini Alhaq, M.Pd.** (..................)

Penguji Utama : **Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd** (..................)

Penguji Pendamping I : **Farida, S.Kom., MMSI.** (..................)

Penguji Pendamping II : **Dona Dinda Pratiwi, M.** (..................)

Mengetahui
Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN

Prof. Dr. Hj. Nirva Diana, M.Pd
NIP. 196408281988032002

MOTTO

وَاعْلَمْ أَنَّ النَّصْرَ مَعَ الصَّبْرِ، وَأَنَّ الْفَرَجَ مَعَ الْكَرْبِ، وَأَنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

Artinya *: " Ketahuilah bahwa kemenangan bersama kesabaran, kelapangan ersama kesempitan, dan kesulitan bersama kemudahan"*
(HR At-Tirmidzi)

PERSEMBAHAN

Puji syukur allhamdulillah hamba panjatkan kepada-Mu Ya Allah SWT yang telah memberikan kekuatan dan kelancaran dalam menyelesaikan tugas akhir skripsi. Shalawat salam penulis sanjung agungkan kepada baginda nabi agung Muhammad SAW yang menjadi suri tauladan seluruh umat islam dalam menjalani kehidupan. Penulis persembahkan sebuah karya ini kepada:

1. Kedua orang tuaku tercinta dan tersayang, Bapak Rusman, S.E. dan Ibu Risa Puspita, A.Pi yang telah memberikan cinta, kasih dan sayang dan doa yang tulus untuk saya. Terimakasih tak terhingga untuk bapak dan ibu yang telah mendidik, membesarkan, membiayai pendidikan saya, memberikan semangat, dan dukungan selama ini serta menghantarkan saya sampai menyelesaikan Pendidikan S1 di Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung.
2. Kedua Adik Kandung saya Muhammad Zaki Fauzan Aqilla dan Dhiya Laila Az Zahra terimakasih atas kasih sayang dan semangat yang sudah diberikan.
3. Diriku sendiri, terimakasih Aku yang sudah berjuang sampai saat ini. Semoga aku selalu kuat dan semangat menjalani hari-hari selanjutnya. Semoga perjalananku kemarin, hari ini dan esok selalu diberikan keberkahan dan petunjuk oleh allah SWT.
4. Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung yang telah menjadi tempatku menuntut ilmu dalam proses meraih cita-citaku menjadi seorang pendidik.

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Haya Nadirah Kharisma yang lahir di Adijaya pada tanggal 17 januari 1999. Penulis merupakan putri pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Rusman, S.E. dan Ibu Risa Puspita, A.Pi. Penulis mengawali pendidikan di TK Citra Insani yang dimulai pada tahun 2003 dan diselesaikan pada tahun 2005 kemudian penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Dasar (SD) Swasta Citra Insani yang dimulai pada tahun 2005 dan diselesaikan pada tahun 2011 kemudian melanjutkan ke MTs Diniyyah Putri Lampung dan diselesaikan pada tahun 2014 selanjutnya untuk jenjang sekolah menengah atas dilanjutkan di MA Diniyyah Putri Lampung pada tahun 2014 dan diselesaikan pada tahun 2017. Pada tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Raden Intan Lampung jurusan Pendidikan Matematika. Pada bulan juli 2020 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata - Dari Rumah (KKN-DR) di Desa Sabah Balau, Kecamatan Tanjung Bintang, Kabupaten Lampung Selatan. Pada bulan oktober 2020 penulis melaksanakan Praktik Pengalaman Lapangan (PPL) di SMP Negeri 34 Bandar Lampung.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur allhamdulillah penulis panjatkan Kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan anugrahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir kuliah skripsi dengan judul "Bedah Determinan Matriks : Soal dan Pembahasan Super Lengkap" sebagai syarat guna memperoleh gelar sarjana S1 pendidikan matematika. Tidak lupa shalawat beriring salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita nabi agung Muhammad SAW yang mudah-mudahkan kita semua mendapatkan syafaatnya kelak diyaumil akhir. Aamiin.

Penyelesaian tugas skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, bimbingan, serta bantuan dari beberapa pihak. Sehingga penulis mengucapkan terimaksih kepada:

1. Bapak Prof. H. Wan Jamaluddin Z, M.Ag., Ph. D selaku Rektor UIN Raden Intan Lampung.
2. Ibu Prof. Dr. Hj. Nirva Diana, M.Pd, selaku Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Raden Intan Lampung.
3. Bapak Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd selaku kepala pogram studi Pendidikan Matematika.
4. Ibu Farida, S.Kom., MMSI. selaku pembimbing I yang telah memberi arahan dan bimbingan selama proses menyelesaikan skripsi.
5. Ibu Dona Dinda Pratiwi, M.Pd selaku pembimbing II yang telah membimbing penulis menyelesaikan skripsi ini.
6. Bapak dan Ibu dosen fakultas tarbiyah dan keguruan yang telah membimbng dan memberikan ilmunya selama menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung.
7. Keluarga tercinta terutama kedua orang tua yang selalu memberikan semangat, dukungan, dan fasilitas yang telah diberikan selama ini.
8. Partnerku dalam segala situasi, Galang Arkan Pratama, S.Ars.. Terimakasih atas dukungan, kebaikan, perhatian dan kebijaksanaan.

9. Sahabat-sahabat terbaikku, Apt. Leony Eka Nuari Chandra, S.Farm., Fayiz Falery Vioren, S.T., Theoderik Panjaitan, terimakasih telah menyemangati dan membersamaiku dari masa sebelum puberku hingga sekarang.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang telah membantu dalam proses penyelesaian tugas skripsi.
11. Universitas tercinta UIN Raden Intan Lampung.

Semoga bantuan, bimbingan, arahan, serta dukungan yang telah diberikan akan menjadi amal yang baik dan akan mendapatkan balasan dari Allah SWT. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini memiliki banyak kekurangan dan jauh dari kesempurnaan. Sehingga penulis berharap adanya saran dan kritik yang membangun dari pembaca. Semoga skripsi ini dapat memberi manfaat bagi semua pihak. Aamiin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Bandar Lampung,   2024

Haya Nadirah Kharisma
NPM. 1711050167

DAFTAR ISI

Determinan Matriks

I.1 Pendahuluan

Misalkan A matriks bujur sangkar, fungsi determinan A sering dituliskan sebagai determinan (disingkat det(A) atau |A|) didefinisikan sebagai *jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A.*

Jika A berukuran nxn, maka hasil kali elementer dari matriks A akan berbentuk :

$a_1p_2.a_2p_2...anpn$ dimana $p_1p_2...pn$ Merupakan permutasi dari bilangan-bilangan 1,2,...,n. Tanda dari $a_1p_1.a_2p_2...anpn$ sendiri ditentukan dari banyaknya bilangan bulat besar yang mendahului bilangan yang lebih kecil **(banyaknya invers)** pada bilangan jika banyaknya invers adalah ganjil maka tandanya negatif (-) dan jika sebaliknya tandanya positif (+).

Fungsi determinan pertama kali ditemukan pada waktu pengkajian sistem persamaan linear. Kita akan melihat bahwa determinan merupakan metode yang sangan penting dalam mengkaji dan memperoleh sifat-sifat matriks bujursangkar.

Contoh 1.1.1

Diketahui A=$[a]$

Tentukan det(A) !

Jawab

Banyaknya permutasi 1 (karena A berukuran 1x1)=1. Maka A akan memiliki invers perkalian jika dan hanya jika $a \neq 0$.

Jadi, jika kita mendefinisikan

$$\det(A) = a$$

Maka A adalah taksingular jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Contoh 1.1.2

Diketahui A = [8]

Tentukan det(A) !

Jawab

Karena det(A) = a, maka det(A) = 8

Contoh 1.1.3

Diketahui A= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Tentukan det(A) !

Jawab

Banyaknya permutasi 1,2 (karena A berukuran 2x2)=2 yaitu 12 dan 21

Pada bilangan 12 akan didapatkan banyaknya invers = 0 sehingga tanda untuk hasil kali elementer $a_{11}.a_{22}$ adalah (+), sedangkan untuk hasil kali elementer $a_{12}.a_{21}$ akan bertanda (-) karena pada bilangan 21 terdapat satu angka bulat yang mendahului angka yang lebih kecil.

Jadi det(A) = + $a_{11}.a_{22}$ - $a_{12}.a_{21}$ = ad-bc

Contoh 1.1.4

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A) !

Jawab

Det(A) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 4.5 – 3 . 2

= 20 – 6

= 14

Contoh 1.1.5

Diketahui G = $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Tentuka det(G) !

Jawab

Det (G) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 7.5 – 1.4

= 35 – 4

= 31

Contoh 1.1.6

Diketahui matriks

A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

B = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Jika A.C = B, maka determinan matriks Cadalah..

Jawab

Det(A) = $a_{11}.a_{22}$ - $a_{12}.a_{22}$

= ad – bc

= 2.4 – 3.3

= 8 – 9

= - 1

Det(B) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= (-1).2 – 0.1

= - 2 – 0

= - 2

Karena A.C = B, maka berlaku det(A) . det(C) = det(B)

Sehingga

-1. Det(C) = -2

Det(C) = - 2 / - 1

Det (C) = 2

Contoh 1.1.7

Jika nilai determinan matriks Q adalah 8, carilah nilai x dari matriks:

Q = $\begin{bmatrix} x & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab

Det(Q) = 8

8 = $\begin{bmatrix} x & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

= (x.1 – (-2).2)

8 = x + 4

x = 8 – 4

= 4

Contoh 1.1.8

Diketahui B=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, Tentukan det B !

Jawab

Untuk memudahkannya akan dibuat tabel sebagai berikut:

permutasi	Hasil kali elementer	Banyak invers	Hasil elementer bertanda
123	$a_{11}.a_{22}.a_{33}$	0	$+a_{11}.a_{22}.a_{33}$
132	$a_{11}.a_{23}.a_{32}$	1	$-a_{11}.a_{23}.a_{32}$
213	$a_{12}.a_{21}.a_{33}$	1	$-a_{12}.a_{21}.a_{33}$
231	$a_{12}.a_{23}.a_{31}$	2	$+a_{12}.a_{23}.a_{31}$
312	$a_{13}.a_{21}.a_{32}$	2	$+a_{13}.a_{21}.a_{32}$
321	$a_{13}.a_{22}.a_{31}$	3	$-a_{13}.a_{22}.a_{31}$

Jadi det (B) = + $a_{11}.a_{22}.a_{33}$ - $a_{11}.a_{23}.a_{32}$ + $a_{12}.a_{23}.a_{31}$ - $a_{12}.a_{21}.a_{33}$ + $a_{13}.a_{21}.a_{32}$ - $a_{13}.a_{22}.a_{31}$

Contoh 1.1.9

Diketahui B = $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan det(B) !

Jawab

Det(B) = $a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} +$

$a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$

= 1.4.2 – 1.(-5).1 + (-3).(-5).1 – (-3).0.2 + 2.0.1 –

$2.4.(-1)$

$= 8 + 5 + 15 + 0 + 0 + 8$

$= 36$

Contoh 1.1.10

Diketahui C = $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan det(C) !

Jawab

Det(C) = $a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} +$

$a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$

$= 8.4.2 - 8.6.1 + 1.6.3 - 1.0.2 + 2.0.1 - 2.4.3$

$= 64 - 48 + 18 - 0 + 0 - 24$

$= 10$

Contoh 1.1.11

Diketahui M = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan det(M) !

Jawab

$$\text{Det}(M) = a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$$

$$= 2.5.2 - 2.3.0 + 4.3.7 - 4.3.2 + 6.3.0 - 6.5.7$$

$$= 20 - 0 + 84 - 24 + 0 - 210$$

$$= -130$$

Untuk kasus matriks yang berukuran lebih dari 3x3, tentunya penentuan nilai determinan dengan menggunakan definisi tersebut menjadi kurang efekti dan lebih

Rumit. Berdasarkan definisi dari determinan tersebut maka dikembangkan metode perhitungan determinan yang lebih cepat yang akan dibahas dibagian selanjutnya.

I.2 Sifat-sifat Determinan dan Reduksi Baris

Menurut buku J.LEON ada beberapa sifat yang mempermudah dalam perhitungan nilai determinan, yaitu:

I. Pertukaran dua baris (atau kolom) dari suatu matriks akan mengubah tanda dari determinan.

II. Mengalikan satu baris atau kolom dari suatu matriks dengan suatu skalar sama akibatnya dengan mengalikan nilai dari determinan dengan skalar tersebut.

III. Menjumlahkan perkalian dari satu baris (atau kolom) pada baris lain (atau kolom lain) tidak akan mengubah nilai dari determinan.

CATATAN: Sebagai akibat dari III, jika satu baris (atau kolom) dari suatu matriks adalah kelipatan dari baris (atau kolom) lain, maka determinan dari matriks terrsebut harus sama dengan nol.

Sebagai akibat dari II maka semua matriks elementer memiliki determinan taknol.

Sedangkan menurut buku Mahmud 'Imrona ada 9 langkah dalam perhitungan nilai determinan, yaitu:

a. Det(AB)=det(A)det(B)

Contoh 1.2.1.1

Diketahui A = $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A)det(B) dan det(AB) !

Jawab

Det(A) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= (-3).2 – 1.0

= -6 – 0

= -6

Det(B) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 2.5 – (-3).(-4)

= 10 – 12

= -2

Det(A).Det(B) = (-6) . (-2)

= 12

AB = $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

=$\begin{bmatrix} -3(2) + 1(-4) & -3(-3) + 1(5) \\ 0(2) + 2(-4) & 0(-3) + 2(5) \end{bmatrix}$

=$\begin{bmatrix} (-6) + (-4) & 9 + 5 \\ 0 + (-8) & 0 + 10 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -10 & 14 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$

Det(AB) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= (-10).10 – 14.(-8)

= -100 – (-112)

= 12

Kembali ke sifat det(AB) = det(A).det(B), maka :

Det(AB) = det(A).det(B)

12 = (-6) . (-2)

12 = 12

Contoh 1.2.1.2

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A)det(B) dan det(AB) !

Jawab

Det(A) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 4.5 – 3.2

= 20 – 6

= 14

Det(B) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 2.4 – 3.3

= 8 – 9

= - 1

Det(A).det(B) = 14.(-1)

= - 14

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(2)+3(3) & 4(3)+3(4) \\ 2(2)+5(3) & 2(3)+5(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8+9 & 12+12 \\ 4+15 & 6+20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 19 & 26 \end{bmatrix}$$

Det(AB) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 17.26 – 19.24

= 442 – 456

= - 14

Kembali ke sifat det(AB) = det(A).det(B), maka

Det(AB) = det(A).det(B)

-14 = 14 . (-1)

-14 = -14

Conroh 1.2.1.3

Diketahui G = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ dan H = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

Tentukan det(G).det(H) dan det(GH) !

Jawab

Det(G) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 3.6 – 4.5

= 18 – 20

= -2

Det(H) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

$= 2.4 – 3.7$

$= 8 – 21$

$= -13$

Det(G).det(H) = (-2) . (-13)

$= 26$

$$GH = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(2) + 4(7) & 3(3) + 4(4) \\ 5(2) + 6(7) & 5(3) + 6(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + 28 & 9 + 16 \\ 10 + 42 & 15 + 24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 34 & 25 \\ 52 & 39 \end{bmatrix}$$

Det(GH) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 34.39 – 25.52

= 1.326 – 1.300

= 26

Kembali ke sifat 1 det(A).det(B) = det(AB), maka :

Det(GH) = det(G).det(H)

26 = (-2).(-13)

26 = 26

b. Det(A^T)=det(A)

Contoh 1.2.2.1

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A) dan det (A^T)!

Jawab

Det(A) = $a_{11}.a_{22} – a_{12}.a_{21}$

$= ad - bc$

$= 3.7 - 5.1$

$= 21 - 5$

$=16$

A^T (transpose matriks A) didefinisikan sebagai matriks yang baris-barisnya merupakan kolom dari A.

Maka $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

$Det(A^T) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$= ad - bc$

$= 3.7 - 1.5$

$= 21 - 5$

$= 16$

Jadi benar jika $det(A^T) = det(A)$

Contoh 1.2.2.2

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan $det(A)$ dan $det(A^T)$!

Jawab

$Det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}._{21}$

$= ad - bc$

$= 4.5 - 3.2$

$= 20 - 6$

$= 14$

$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$Det(A^T) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$= ad - bc$

$= 4.5 - 2.3$

$= 20 – 6$

$= 14$

Kembali ke sifat det(A^T) = det(A), maka :

Det(A^T) = 14

14 = 14

Contoh 1.2.2.3

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A) dan det(A^T) !

Jawab

Det(A) = $a_{11}.a_{22} – a_{12}.a_{21}$

$= ad – bc$

$= 3.3 – 4.2$

$= 9 – 8$

$= 1$

$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Det(A^T) = $a_{11}.a_{22} – a_{12}.a_{21}$

$= ad – bc$

$= 3.3 – 2.4$

$= 9 – 8$

$= 1$

Kembali ke sifat det(A^T) = det(A), maka :

Det(A^T) = 1

1 = 1

c. Jika A matriks diagonal maka det(A)=$a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ *{perkalian dari semua entri pada diagonal utama}*

Contoh 1.2.3.1

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A) !

Jawab

Cara pertama menggunakan aturan sarrus

$$\det(A) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.aa_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} -$

$a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$

$= 5.7.2 + 0.0.0 + 0.0.0 - 0.7.0 - 5.0.0 - 0.0.2$

$= 60 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$

$= 60$

Kemudian bisa diterapkan sifat 3 yaitu perkalian dari semua entri pada diagonal utama, sehingga

Det(A) = $a_{11}.a_{22}.a_{33}$

$= 5.7.2$

$= 60$

Terbukti bahwa jika A adalah matriks diagonal, maka untuk menentukan nilai determinan matriksnya dapat mengalikan semua entri pada diagonal utamanya.

Contoh 1.2.3.2

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A) !

Jawab

Cara pertama menggunakan aturan sarrus

$$\det(A) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 8 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$= a_{11}.a_{22}.a_{33}. + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} -$

$a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$

$= 8.7.6 + 0.0.0 + 0.0.0 - 0.7.0 - 8.0.0 - 0.0.6$

$= 336 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$

$= 336$

Cara kedua dengan menggunakan sifat 3

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$= a_{11}.a_{22}.a_{33}$

$= 8.7.6$

$= 336$

Terbukti bahwa jika A adalah matriks diagonal, maka untuk menentukan nilai determinan matriksnya dapat mengalikan semua entri pada diagonal utamanya.

Contoh 12.3.3

Diketahui $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Tentukan nilai det(B)

Jawab

Pertama akan dijawab menggunakan aturan sarrus

$$\mathrm{Det}(B) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$= a_{11}.a_{22}.a_{33}. + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} -$

$a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$

= 2.6.8 + 0.0.0 + 0.0.0 – 0.6.0 – 2.0.0 – 0.0.8

= 96 + 0 + 0 – 0 – 0

= 96

Untuk membuktikan sifat kita jawab menggunakan sifat

$$\text{Det(B)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$= a_{11} + a_{22} + a_{33}$

= 2.6.8

= 96

Terbukti bahwa jika A adalah matriks diagonal, maka untuk menentukan nilai determinan matriksnya dapat mengalikan semua entri pada diagonal utamanya.

d. Jika A matriks segitiga maka det(A)= $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ *{perkalian n dari semua entri pada diagonal utama}*

Contoh 1.2.4.1

Diberikan matriks $A_{3x3} = [aij]$ sebagai berikut :

$$A= \begin{bmatrix} \pi & 3/4 & -1 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Tentukan determinan dari matriks A !

Jawab

Cara pertama menggunakan metode ekspansi kofaktor pada kolom pertama ($a_{11} = \pi$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$).

$$\begin{aligned} \text{Det(A)} &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= a_{11}C_{11} \\ &= \pi\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 3/2 \end{vmatrix} \\ &= \pi\,(3-0) \\ &= 3\,\pi \end{aligned}$$

Cara kedua menggunakan sifat ke 4, maka :

$$\begin{aligned} \text{Det(A)} &= a_{11} \text{ x } a_{22} \text{ x } a_{33} \\ &= \pi \text{ x } 2 \text{ x } \frac{3}{2} \\ &= \pi \text{ x } 3 \\ &= 3\,\pi \end{aligned}$$

Terbukti bahwa jika A adalah matriks segitiga, maka untuk menentukan nilai determinan matriksnya dapat mengalikan semua entri pada diagonal utamanya.

Contoh 1.2.4.2

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A) !

Jawab

$$\text{Det(A)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix}$$

$$= (-3)(-55) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix}$$

$= (-3)(-55)(1)$

$= 165$

Contoh 1.2.4.3

Diketahui $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

Tentukan det(C) !

Jawab

Pertama kita dapat menjawab menggunakan ekspansi kofaktor pada kolom ketiga ($a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = 8$)

$\text{Det}(C) = a_{13}.C_{13} + a_{23}.C_{23} + a_{33}.C_{33}$

$= a_{33}.C_{33}$

$= 8. \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= 8 . (3.2 – 0.4)$

$= 8. (6-0)$

$= 8.6$

$= 48$

Untuk membuktikan sifat maka kita akan menggunakan perkalian semua entri pada diagonal utama

$$\text{Det(C)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$= a_{11}.a_{22}.a_{33}$

$= 3.2.8$

$= 48$

Terbukti bahwa jika A adalah matriks segitiga, maka untuk menentukan nilai determinan matriksnya dapat mengalikan semua entri pada diagonal utamanya.

e. Jika $A_{n\times n}$ maka $\det(kA) = k^n \det(A)$. *{tedapat perkalian k sebanyak n kali}.*

Contoh 1.2.5.1

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$

Tentukan det(3A) dan 3^2det(A) !

Jawab

Cara pertama, dengan mengalikan matriks A dengan 3 sehingga mendapatkan

3A = 3 x $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 9 & 27 \\ 36 & 45 \end{bmatrix}$

Det(3A) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 9.45 – 27.36

$= 405 – 972$

$= - 567$

Cara kedua menggunakan sifat ke 5

Det(3A) = $3^2\ x$ det(A)

$= 9 \text{ x } \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$

$= 9 (45 – 108)$

$= 9 \text{ x } (-63)$

$= - 567$

Terbukti bahwa jika A adalah matriks dengan ordo yang sama, maka untuk menentukan nilai determinan k dikalikan dengan matriks A akan memiliki hasil yang sama dengan k^n. det(A).

Contoh 1.2.5.2

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

Tentukan det(3A) dan 3^2det(A) !

Jawab

3A = 3 x $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3x2 & 3x4 \\ 3x6 & 3x8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$

Det(3A) = $a_{11}.a_{22} – a_{12}.a_{22}$

$= ad – bc$

$= 6.24 – 12.18$

$= 144 – 216$

$= -72$

$3^2\det(A) = 3^2 \times \det(A)$

$$= 9 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$= 9 \times (16 – 24)$

$= 9 \times -8$

$= -72$

Terbukti bahwa jika A adalah matriks dengan ordo yang sama, maka untuk menentukan nilai determinan *k* dikalikan dengan matriks A akan memiliki hasil yang sama dengan k^n. det(A).

Contoh 1.2.5.3

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

Tentukan det(2A) dan $2^2\det(A)$!

Jawab

$$2A = 2.\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(2) & 4(2) \\ 6(2) & 8(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

Det(2A) = $a_{11}.a_{22} – a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= (4.16) – (8.12)

= 64 – 96

= - 32

Det(A) = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

= $a_{11}.a_{22} – a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= (2.8) – (4.6)

= 16 – 24

= -8

Det(2A) = 2^2.det(A)

-32 = 2^2 . (-8)

-32= 4 . (-8)

-32 = -32

Terbukti bahwa jika A adalah matriks dengan ordo yang sama, maka untuk menentukan nilai determinan k dikalikan dengan matriks A akan memiliki hasil yang sama dengan k^n. det(A).

f. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, untuk \det(A) \neq 0.$

Contoh 1.2.6.1

Diketahui A = $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A^{-1}) dan $\frac{1}{\det(A)}$!

Jawab

Det(A) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= (-4).3 – 1.2

= (-12) – 2

= - 14

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$. adj(A)

$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{3}{-14} & \frac{1}{14} \\ \frac{2}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$

$Det(A^{-1}) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$= ad - bc$

$= (\frac{3}{-14}).(\frac{4}{14}) - (\frac{1}{14}).(\frac{2}{14})$

$= \frac{-14}{196}$

$= -\frac{1}{14}$

Kembali ke sifat yang ke 6, maka didapatkan :

$Det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$-\frac{1}{14} = \frac{1}{-14}$

$-\frac{1}{14} = -\frac{1}{14}$

Terbukti bahwa jika $\det(A) \neq 0$, maka $\det(A^{-1})$ sama dengan $\frac{1}{\det(A)}$.

Contoh 1.2.6.2

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Tentukan $\det(A^{-1})$ dan $\frac{1}{\det(A)}$!

Jawab

$Det\ (A) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$= a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$= ad - bc$

$= 6.4 - 3.2$

$= 24 - 6$

$= 18$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$

$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{4}{18} & -\frac{3}{18} \\ -\frac{2}{18} & \frac{6}{18} \end{bmatrix}$

$\text{Det}(A^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{4}{18} & -\frac{3}{18} \\ -\frac{2}{18} & \frac{6}{18} \end{bmatrix}$

$= a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$= ad - bc$

$= \frac{4}{18} . \frac{6}{18} - (-\frac{3}{18} . -\frac{2}{18})$

$= \frac{24}{324} - \frac{6}{324}$

$= \frac{18}{324}$

$= \frac{1}{18}$

Kembali ke sifat yang ke 6, maka didapatkan :

$\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$\frac{1}{18} = \frac{1}{18}$

Terbukti bahwa jika $\det(A) \neq 0$, maka $\det(A^{-1})$ sama dengan $\frac{1}{\det(A)}$.

Contoh 1.2.6.3

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A^{-1}) dan $\frac{1}{\det(A)}$!

Jawab

Det(A) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 4.2 – 1.2

= 8 – 2

= 6

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$.adj(A)

$= \frac{1}{6}. \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$

Det(A^{-1}) = $\begin{bmatrix} \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$

= $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

$= \frac{2}{6}.\frac{4}{6} - (-\frac{1}{6}. -\frac{2}{6})$

$= \frac{8}{36}. - \frac{2}{36}$

$= \frac{6}{36}$

$= \frac{1}{6}$

Kembali ke sifat yang ke 6, maka didapatkan :

Det(A^{-1}) $= \frac{1}{\det(A)}$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Terbukti bahwa jika det(A) $\neq 0$, maka det(A^{-1}) sama dengan $\frac{1}{\det(A)}$.

g. Jika A memuat baris nol atau kolom nol maka det(A) = 0. *{ekspansi kofaktor sepanjang baris/kolom nol tersebut}.*

Contoh 1.2.7.1

Diketahui G = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan det(G) !

Jawab

Det(G) = $g_{11}.g_{22} - g_{12}.g_{21}$

= ad – bc

= 3.0 – 1.0

= 0

Terbukti bahwa jika terdapat matriks nukur jangkar yang tiap elemen pada suatu baris atau kolom nol mada determinan matriks tersebut adalah nol.

Contoh 1.2.7.2

Diketahui D = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan det(D) !

Jawab

Det(D) = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

= $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= 0.5 – 1.0

= 0 – 0

$= 0$

Terbukti bahwa jika terdapat matriks bujur sangkar yang tiap elemen pada suatu baris atau kolom nol maka determinan matriks tersebut adalah nol.

Contoh 1.2.7.3

Diketahui D = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan det(D) !

Jawab

Det(D) = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$= a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$= 3.0 - 0.4$

$= 0 - 0$

$= 0$

Terbukti bahwa jika terdapat matriks bujur sangkar yang tiap elemen pada suatu baris atau kolom nol maka determinan matriks tersebut adalah nol.

h. Terhadap operasi baris elementer, determinan mempunyai sifat seperti berikut:

1) Jika A' diperoleh dari A dengan cara mengalikan satu baris dari A dengan konstanta $k \neq 0$, maka $\det(A') = k\det(A)$.

Contoh 1.2.8.1.1

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan k = 2

Tentukan k.det(A) dan $\det(A')$!

Jawab

Det(A) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 11.3 – 6.4

= 33 – 24

= 9

k.det(A) = 2.9

= 18

$A' = \begin{bmatrix} 22 & 12 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Det(A') = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 22.3 – 12.4

= 66 – 48

= 18

Kembali ke sifat det(A') = k.det(A), maka akan mendapatkan

Det(A')= k.det(A)

18 = 18

Contoh 1.2.8.1.2

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ dan k = 2

Tentukan k.det(A) dan $\det(A')$!

Jawab

Det(A) = $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

= $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 3.9 – 6.2

= 27 – 12

$= 15$

k.det(A) = 2.15

$= 30$

A'= k.A

$= 2. \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

$\text{Det}(A') = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

$= a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$= ad - bc$

$= 6.9 - 12.2$

$= 54 - 24$

$= 30$

Kembali ke sifat det(A') = k.det(A), maka akan mendapatkan

Det(A')= k.det(A)

30 = 30

2) Jika A' diperoleh dari A dengan menukar baris, maka $\det(A') = -\det(A)$.

Contoh 1.2.8.2.1

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A') dan det(A) !

Jawab

$A' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$

Det(A') = $a_{11}.a_{22} – a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 6.4 – 11.3

= 24 – 33

= - 9

Det(A) = $a_{11}.a_{22} – a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 11.3 – 6.4

= 33 – 24

= 9

Kembali ke sifat det(A') = - det(A) maka didapatkan

Det(A') = - det(A)

-9 = -9

Contoh 1.2.8.2.2

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A') dan det(A) !

Jawab

$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

Det(A) = $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

= $a_{11}.a_{22} – a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 9.3 – 5.2

= 27 – 10

= 17

$\text{Det}(A') = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

$= a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad – bc

= 2.5 – 3.9

= 10 – 27

= - 17

Kembali ke sifat det(A') = - det(A) maka didapatkan

Det(A') = - det(A)

-17 = -17

3) Jika A' diperoleh dari A dengan cara menjumlahkan satu baris dengan kelipatan baris yang lain, maka $\det(A') = \det(A)$.

Contoh 1.2.8.3.1

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A') dan det (A) !

Jawab

Det(A) = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

= ad - bc

= 11.3 – 6.4

= 33 – 24

= 9

$A' = \begin{bmatrix} 23 & 15 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Det (A') = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$= ad - bc$

$= 23.3 - 15.4$

$= 69 - 60$

$= 9$

Kembali ke sifat det(A') = det(A) maka diperoleh

det(A') = det(A)

9 = 9

Contoh 1.2.8.3.2

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A') dan det (A) !

Jawab

Det(A) = $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$= ad - bc$

$= 7.3 - 5.2$

$= 21 - 10$

$= 11$

$A' = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Det(A') = $\begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$= ad - bc$

$= 11.3 - 11.2$

$= 33 - 22$

= 11

Kembali ke sifat det(A') = det(A) maka diperoleh

det(A') = det(A)

11 = 11

i. Jika A memuat dua baris yang saling berkelipatan atau dua kolom yang saling berkelipatan, maka $\det(A) = 0$.

Contoh 1.2.9

Diketahui I = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

Tentukan det(I) !

Jawab

det(I) = $a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$

$+ a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$

= 1.1.10 – 1.16.4 + 2.16.2 – 2.7.10 + 5.7.4 – 5.1.2

= 10 – 64 + 64 – 140 + 140 – 10

= 0

Dengan menggunakan sifat-sifat di atas, penghitungan determinan dapat lebih dipermudah dan metode yang digunakan dinamakan metode **reduksi baris** yaitu dengan tetap memperhatikan sifat-sifat determinan matriks yang diubah menjadi matriks segitiga.

I.3 Metode perhitungan determinan

- **DEFINISI:** Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks $n \times n$ dan misalkan M_{ij} menyatakan matriks $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapus baris dan kolom yang mengandung a_{ij}. Determinan dari M_{ij} disebut **minor** dari a_{ij}. Kita definisikan **kofaktor** $A_{ij}\ dari\ a_{ij}$ dengan $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.

  Perlu ditekankan bahwa M_{ij} merupakan sebuah matriks, sementara A_{ij} merupakan sebuah scalar.

Contoh 1.3.1

Misalkan A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Tentukan minor dan kofaktor dari :

a. $|M_{23}|$ dan A_{23}

b. $|M_{31}|$ dan A_{31}

Jawab

a. $|M_{23}| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

$= 1.8 - 2.7$

$= 8 - 14$

$= -6$

$A_{23} = (-1)^{I+j} |M_{i+j}|$

$= (-1)^{2+3} |M_{23}|$

$= (-1)^5.(-6)$

$= -(-6)$

$= 6$

b. $|M_{31}| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= 2.6 – 3.5$

$= 12\text{-}15$

$= -3$

$A_{31} = (-1)^{I + j} |M_{i + j}|$

$= (-1)^{3 + 1} |M_{31}|$

$= (-1)^{4}.(-3)$

$= 1.(-3)$

$= -3$

Dengan meninjau definisi ini, untuk suatu matriks A berorde 2x2, kita dapat menuliskan dlam bentuk:

a. Ekspansi kofaktor

Pada metode ini dikenal beberapa istilah, antara lain:

Minor eleman $\boldsymbol{aij}$ ($\boldsymbol{Mij}$) yaitu determinan yang didapatkan dengan menghilangkan baris i dan kolom j matriks awalnya.

Contoh 1.3.2

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Tentukan $|M_{11}|$ dan $|M_{23}|$!

Jawab

$|M_{11}| = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

$$|M_{23}| = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Kofaktor elemen aij (Cij)=$(-1)i+jMij$

Jika A matriks bujur sangkar berukuran nxn, maka dengan menggunakan metode ini perhitungan determinan dapat dilakukan dengan dua cara yang semuanya menghasilkan hasil yang sama yaitu:

- Ekspansi sepanjang baris i

Det(A) =$ai1\ CI1+\ ai2Ci2+...+ainCin$

- Ekspansi sepanjang kolom j

Det(A) = $a1jC1j+\ a2jC2j+....+anjCnj$

Contoh 1.3.3

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Tentukan det(A) dengan kofaktor!

Jawab

Det(A) = 2.(27-40) – (36 – 48) + 7. (20-18)

= - 26 + 12 + 14

= 0

Contoh 1.3.4

Diketahui matriks B = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Tentukan det(B) dengan menggunakan ekspansi kofaktor!

Jawab

$C_{11} = M_{11}$

$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

= 1.4 – (-1).3

= 4 – (-3)

= 4 + 3

= 7

$C_{21} = -M_{21}$

$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

= -(2.4 – 1.3)

= -(8 – 3)

= -5

$C_{31} = M_{31}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

= 2.(-1) – 1.1

= (-2) -1

= -3

$C_{12} = -M_{12}$

$= -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

= - (0.4 – (-1).(-2))

= - (0 - 2)

= 2

$C_{22} = M_{22}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

$= (-1).4 - 1.(-2)$

$= (-4) - (-2)$

$= (-4) + 2$

$= -2$

$C_{32} = - M_{32}$

$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= - ((-1).(-1) - 1.0)$

$= - (1-0)$

$= - 1$

$C_{13} = M_{13}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 0.3 - 1. (-2)$

$= 0 - (-2)$

$= 2$

$C_{23} = - M_{23}$

$= - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= - ((-1).3 - 2.(-2))$

$= - ((-3) - (-4))$

$= - ((-3) + 4)$

$= - 1$

$C_{33} = M_{33}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1).1 - 2.0$

= (-1) – 0

= -1

Semua kofaktor sudah dihitung, maka bisa langsung menghitung nilai determinan B melalui ekspansi kofaktor. Ekspansi melalui kolom pertaman dari B :

Det(B) = $b_{11}C_{11} + b_{21}C_{21} + b_{31}C_{31}$

= (-1).7 + 0.(-5) + (-2).(-3)

= (-7) – 5 + 6

= -1

Contoh 1.3.5

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ tentukan det (A) dengan menggunakan ekspansi kofaktor !

Jawab

Akan dicoba menggunakan ekspansi baris 1 untuk menghitung det (A)

$Det(A) = A_{11}C_{11} + A_{12}C_{12} + A_{13}C_{13}$

$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 - 3 = -1$

$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12} = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = -(2-4) = 2$

$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 8 = -2$

Jadi det (A) = (1−1)+(2.2)+(3.−2) = −3.

Contoh 1.3.6

Hitunglah determinan dari E = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$!

Jawab

Akan coba dikerjakan menggunakan ekspansi melalui baris ke dua

$|E| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & -7 \end{bmatrix}$

$C_{21} = - M_{21}$

$= - \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 9 & -7 \end{vmatrix}$

$= - (3.(-7) – (-5).9)$

$= - (-21 + 45)$

$= - 24$

$|E| = e_{21}C_{21} + e_{22}C_{22} + e_{23}C_{23}$

$= e_{21}C_{21} + 0 + 0$

$= 1.(-24)$

$= - 24$

Contoh 1.3.7

Diketahui B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hitung det (B)!

Jawab

Jika melihat sifat dari metode ini, maka perhitungan akan lebih cepat jika ada elemen a_{1J} yang bernilai 0. Jadi pemilihan baris / kolom akan sangat menentukan kecepatan perhitungan.

Dalam contoh ini terlihat bahwa baris / kolom yang mengandung banyak nilai 0 adalah kolom 2. Jadi det (B) akan dapat dihitung secara cepat menggunakan ekspansi terhadap kolom 2.

$det(B) = a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32} = a_{22}c_{22}$ (karena a_{12} dan a_{32} bernilai 0).

$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 3 = -2$

Jadi det(B) = 2 —2 —4.

Contoh 1.3.8

Dengan ekspansi kofaktor, hitung determinan B = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$!

Jawab

Akan dicoba menggunakan ekspansi melalui baris kedua

Det(B) = $b_{21}C_{21} + b_{22}C_{22} + b_{23}C_{23}$

C_{21} = - M_{21}

$= - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

= - ((-2).4 – 1.1)

= - (-8-1)

= - (-9)

= 9

C_{22} = M_{22}

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1.4 - 1.1$

$= 3$

$C_{23} = - M_{23}$

$= - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= - (1.1 – (-2).1)$

$= - (1.2)$

$= - 3$

$Det(B) = b_{21}C_{21} + b_{22}C_{22} + b_{23}C_{23}$

$= 3.9 + 1.3 + (-1).(-3)$

$= 27 + 3 + 3$

$= 33$

b. Reduksi baris menggunakan operasi baris elementer

Umumnya pada saat kita menghitung determinan dari suatu matriks persegi, kita menggunakan tiga metode pokok yaitu metode kupu-kupu (khusus untuk matriks 2x2), metode Sarrus (khusus untuk matriks 3x3) dan metode ekspansi kofaktor. Selain ketiga metode di atas terdapat metode lain yang dapat digunakan dalam mencari determinan matriks yaitu metode reduksi baris, dimana prosesnya menerapkan operasi baris elementer untuk mengarahkan kedalam bentuk matriks yang sederhana (dapat berupa matriks segitiga, diagonal, eselon baris atau lainnya) tujuannya agar mempermudah dalam menghitung determinannya.

Perhatikan ilustrasi berikut :

$A = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$ akan direduksi baris dengan

$$A^* = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ 0 & y_{22} & y_{23} \\ 0 & 0 & y_{33} \end{vmatrix}$$

Sedemikian rupa sehingga:

$\text{Det}(A) = \det(A^*) = y_{11} \times y_{22} \times y_{33}$

Catatan : Pada ilustrasi di atas, persamaan $\det(A) = \det(A^*) = y_{11} \times y_{22} \times y_{33}$ belum tentu benar, namun kita dapat memastikan persamaan tersebut bernilai benar dengan selalu menggunakan satu jenis operasi elementer, yaitu menambahkan satu baris dengan kelipatan baris lainnya.

Penggunaan metode ini sebenarnya tidak lepas dari metode ekspansi kofaktor yaitu pada kasus suatu kolom banyak mengandung elemen yang bernilai 0. Berdasarkan sifat ini maka matriks yang berbentuk eselon baris atau matriks segitiga akan lebih mudah untuk dihitung nilai determinannya karena hanya merupakan perkalian dari elemen diagonalnya. Reduksi baris dilakukan dengan mengubah kolom-kolom sehingga banyak memuat elemen 0. Biasanya bentuk matriks akhir yang ingin dicapai adalah bentuk eselon baris atau bentuk segitiga tetapi ini tidak mutlak. Jika bentuk eselon atau segitiga belum tercapai tetapi dianggap perhitungannya sudah cukup sederhana maka determinan bisa langsung dihitung. Dalam melakukan reduksi baris operasi yang digunakan adalah operasi baris elementer.

Pada operasi baris elementer ada beberapa operasi yang berpengaruh terhadap nilai determinan awal , yaitu :

- Jika matriks B diperoleh dengan mempertukarkan dua baris pada matriks A maka det (B) = det (A)

- Jika matriks B diperoleh dengan mengalikan konstanta k ke salah satu baris matriks A maka det (B) = k det (A)
- Jika matriks B didapatkan dengan menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya , maka det (B) = det (A).

Contoh 1.3.3

Diketahui A=$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ dan det(A) = r

Tentukan determinan dari matriks-matriks berikut :$a. X = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $b. Y = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $c. Z = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+g & b+h & c+i \end{bmatrix}$

Jawab

a. Matriks X didapatkan dengan mempertukarkan baris 1 dan 2 matriks A , maka det (X) = — det (X) = r
b. Matriks Y didapatkan dengan mengalikan baris ke-2 matriks A dengan 2, maka det (Y) = 2.det (Y) = 2r

c. Matriks Z didapatkan dengan menambahkan baris 1 ke baris 3 matriks A , maka det (Z) = det (Z) = r

Contoh 1.3.4

Hitunglah determinan matriks A dalam contoh 3.2.1 dengan menggunakan reduksi baris!

Jawab

Diketahui A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Eleminasi Gauss

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & -11 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & -5 & -11 \end{bmatrix}$$

$$= (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} = (-2) - 2.1.1.3/2 = -3$$

Menurut buku Mahmud Imrona penggunaan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor secara bersamaan akan menyebabkan penghitungan determinan suatu matriks menjadi lebih singkat lagi. Hal ini diperlihatkan pada contoh di bawah

Contoh 1.3.5

Tentukan determinan matriks di bawah ini

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab

Det(B)= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

{pada baris satu memuat nol yang terbanyak oleh karena itu dilakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama}

=2$(-1)^{1+3}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{b_3-4b_3}$

{determinan submatriks B pada kolom kedua memuat entri satu dan nol, oleh karena itu dilakukan oleh OBE ketiga antara $b_1 dan\ b_3$*}.*

$$= 2(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -15 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

{kolom kedua memuat nol terbanyak, dilakukan ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua}.

$$= 2(-1)^{1+3}1.(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}$$

{karena perhitungan determinan matriks 2 x *2 ini mudah maka lakukan perhitungan secara langsung}*

=-94.

Contoh 1.3.6

Tentukan determinan dari matriks A dengan A didefinisikan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 5 \\ 10 & 11 & 13 \\ 8 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Jawab

$$\text{Det}(A) = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 5 \\ 10 & 11 & 13 \\ 8 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 12 & -6 & 5 \\ 10 & 11 & 13 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(*untuk membentuk matriks segitiga atas atau bawah sehingga akan disederhanakan baris pertama dan kedua menjadi* -6R_3 + R_1 *untuk* R_1 *dan* -5R_3 + R_2 *untuk* R_2*)*

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -12 & 11 \\ 0 & 6 & 18 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(kemudian kira tukar R_1 *dengan* R_3*)*

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -12 & 11 \end{bmatrix}$$

(lalu sederhanakan baris ketiga dengan mengguakan operasi $2R_2 + R_3$ *sehingga memperoleh matriks segitiga)*

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 47 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{4}\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 47 \end{bmatrix}$$

= 2 x 6 x 47

= 564

Det(A) = - 4 X 564

= -2256

I.4 Menentukan himpunan penyelesaian system persamaan linier dengan metode crammer

Metode cremmer didasarkan atas perhitungan determinan matriks. Suatu SPL ysng berbentuk Ax = b dengan A adalah matriks bujur sangkar dapat dikerjakan dengan metode cremmer jika hasil perhitungan menunjukan Bahwa $(A)\neq 0$. Penyelesaian yang di dapatkan dengan metode ini adalah penyelesaian tunggal .

Perhatikan system AX = B yang terdiri dari *n* variable tidak diketahui. Disini A = $[aij]$ adalah matriks koefisien (bujur sangkar) dan B = $[bi]$ adalah vector kolom yang berisi konstanta-konstanta. Misalkan A_i adalah matriks yang diperoleh dari A dengan mengganti kolom ke-*i* dari A dengan vector kolom B.

Diketahui sesuatu system persamaan linier berbentuk Ax=b dengan A adalah matriks bujur sangkar nxn dan (A)≠0 sedangkan nilai x dan b adalah :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Maka penyelesaian untuk x adalah:

$$\overline{x_1} = \frac{|A_1|}{|A|}, \overline{X_2} = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, \overline{X_n} = \frac{|A_n|}{|A|}$$

A_1 adalah matriks A yang kolom ke-1 nya diganti dengan vector b.

Teorema di atas dikenal dengan *aturan Cramer* yang digunakan untuk menyelesaikan system persamaan linear. Perlu ditekankan bahwa teorema ini hanya berlaku untuk system dengan jumlah persamaan yang sama dengan jumlah variable yang tidak diketahui, dan bahwa persaman ini menghasilkan solusi hanya ketika D ≠ 0.

Contoh 1.4.1

Diketahui system persamaan linier berbentuk $A_{\bar{x}} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a. periksa apakah metode cremer dapat digunakan untuk mendapatkan SPL?

b. jika bisa, tentukan penyelesaian untuk $\bar{x}$!

Jawab

a. Det(A) = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (-1)(-1)\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} =$

$(15 - 20) - (6 - 10) = -1.$

Karena det(A)=-1 maka metode Cramer dapat digunakan.

b. Det(A) = $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (-1)1\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} =$

$-(15-20)-(3+5) = -3.$

Det(A) = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = (-1)(-1)\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} =$

$(3+5)-(6-10) = 4.$

Det(A) = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = (-1).\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} =$

$-3.$

Jadi nilai untuk x, y, z adalah

$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3, \bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4}{-1} = -4, dan\ \bar{z} = \frac{|A_n|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Menentukan invers suatu matriks dapat juga menggunakan rumus berikut :

$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$ dimana *adj(A)* = C^T dan C =$\{c_{ij}\}$, c_{ij} = kofaktor elemen a_{ij}.

Contoh 1.4.2

Selesaikan dengan menggunakan determinan, system

$x + y + z = 5$

$x - 2y - 3z = -1$

$2x + y - z = 3$

Jawab

Hitunglah terlebih dahulu determinan D dari matriks koefisien

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$= a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$

$= 1.(-2).(-1) - 1.(-3).1 + 1.(-3).2 - 1.1.(-1) + 1.1.1 - 1.(-2).2$

$= 5$

Karena $D \neq 0$, maka system ini mempunyai Solusi unik. Untuk menghitung N_x, N_y, Nz, kita mengganti koefisien x, y, z di dalam matriks koefisien masing-masing dengan konstanta. Hasilnya adalah

$$N_x = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$= 20$

$$N_y = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$= -10$

$$N_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$= 15$

Sehingga Solusi unik dari sitem tersebut adalah :

$x = N_x / D$

$= 4$

$y = N_y / D$

$= -2$

$z = N_z / D$

= *3*

Yaitu vector u = (4, -2, 3).

I.5 Hubungan determinan, invers matriks dan penyelesaian untuk sistem persamaan linier

Jika suatu SPL berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dan A matriks bujur sangkar, maka sifat dari penyelesaian SPL dapat diketahui dari nilai determinan A atau invers matriks A. Berikut ini adalah hubungan yang berlaku:

Det (A) ≠0↔ A^{-1} terdefinisi (ada) ↔ penyelesaian tunggal untuk SPL

Det (A) = 0 ↔ A tidak memiliki invers

Det (A) = 0 $<^{\text{SPL memiliki penyelesaian banyak}}_{SPL\ tidak\ memiliki\ penyelesaian}$

Pada kasus det(A)≠0 untuk menentukan penyelesaiannya dapat digunakan invers matriks untuk rnenghitungnya, yaitu $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$Sedangkan pada kasus det(A)=0 ,untuk menentukan penyelesaian SPL harus digunakan eliminasi Gauss - Jordan pada matriks diperbesar [A⁝$\bar{b}$].

Latihan

1. Gunakan ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan dari matriks-matriks berikut :

$a.\ A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$ $b.\ B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$

2. Gunakan reduksi baris untuk menghitung determinan dari matriks — matriks berikut

$a.\ A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ $b.\ B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 2 & 3\end{bmatrix}$

3. Diketahui sistem persamaan linier $\bar{x} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

a. Periksa apakah metode Crammer dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian SPL ?

b. Jika ya, tentukan nilai untuk$\bar{}$!

4. Dari soal nomor 3,

a. Tentukan invers A dengan menggunakan rumus $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$!

b. Tentukan nilai $\bar{x}$ dengan menggunakan hasil dari 4.a !

5. Diketahui SPL $A\bar{x}=\bar{b}$ dengan matriks diperbesar $[A|\bar{b}]$sebagai berikkut :

$$[A \vdots \bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -(a^2+1) & a-3 \end{array}\right]$$

Tentukan nilai a agar

a. SPL memiliki penyelesaian tunggal !

b. SPL memiliki penyelesaian banyak !

c. SPL tidak memiliki penyelesaian !

d. Dari sifat determinan berikut:

   Det (AB) = Det A . Det B

   Det (A^t)= Det A

   Jika Det$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = R, Det \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = L$

   Hitung Det $\left(\frac{\begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & -f \\ -g & e \end{bmatrix}}{eh-fg} \right)$!

e. Jika det A = X dan Det B = Y. Tentukan Det (A^tBA^{-1})!

f. Jika A dan B matriks 3 x 3 dengan det A = R dan det B = S. Tentukan det (A^2B^3) !

DAFTAR PUSTAKA

Anton Howard, 2000, *Dasar-Dasar Aljabar Linear*, (Interaksara : Batam).

Imrona Mahmud, 2012, *Aljabar Linear Dasar*, (PT Gelora Aksara Pratama : Bandung)

Jhon Leon Steven, 2001, *Aljabar Linear dan Aplikasinya*, (Erlangga : Jakarta)

Lipschutz Seymour, 2004, *Schaum's Easy Outlines Aljabar Linear*, (Erlangga : Jakarta)

KEMENTRIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI RADEN INTAN LAMPUNG
PUSAT PERPUSTAKAAN

JL.Letkol H. Endro Suratmin, Sukarame I, Bandar Lampung 35131
Telp.(0721) 780887-74531 Fax. 780422 Website: www.radenintan.ac.id

SURAT KETERANGAN
Nomor: B–2327/Un.16 / P1 /KT/VII/ 2024

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : **Dr. Ahmad Zarkasi, M. Sos. I**
NIP : 197308291998031003
Jabatan : Kepala Pusat Perpustakaan UIN Raden Intan Lampung
Menerangkan bahwa Artikel Ilmiah dengan judul :

BEDAH DETERMINAN MATRIKS : SOAL DAN PEMBAHASAN SUPER LENGKAP

Karya

NAMA	NPM	FAKULTAS/PRODI
HAYA NADIRAH KHARISMA	1711050167	FTK/P MTK

Bebas Plagiasi dengan tingkat kemiripan sebesar **10%.** Dan dinyatakan **Lulus** dengan bukti terlampir.

Demikian Keterangan ini kami buat, untuk dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Bandar Lampung, 10 Juli 2024
Kepala Pusat Perpustakaan

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA PUSAT PERPUSTAKAAN UIN RADEN INTAN LAMPUNG

Dr. Ahmad Zarkasi, M. Sos. I
NIP. 197308291998031003

Ket:
1. Surat Keterangan Cek Turnitin ini Legal & Sah, dengan Stempel Asli Pusat Perpustakaan.
2. Surat Keterangan ini Dapat Digunakan Untuk Repository
3. Lampirkan Surat Keterangan Lulus Turnitin & Rincian Hasil Cek Turnitin ini di Bagian Lampiran Skipsi Untuk Salah Satu Syarat Penyebaran di Pusat Perpustakaan.

BEDAH DETERMINAN MATRIKS : SOAL DAN PEMBAHSAN SUPER LENGKAP

by PERPUSTAKAAN UIN RIL

Submission date: 10-Jul-2024 02:08PM (UTC+0700)
Submission ID: 2414557426
File name: TURNITIN_-_Haya_Nadirah_Kharisma.docx (98.66K)
Word count: 5195
Character count: 25015

BEDAH DETERMINAN MATRIKS : SOAL DAN PEMBAHSAN SUPER LENGKAP

ORIGINALITY REPORT

10%	9%	7%	6%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	Submitted to Universitas Negeri Surabaya The State University of Surabaya Student Paper	2%
2	Abdelmoumen Boulbeba. "Exercices & Problèmes Corrigés D'algèbre Linéaire", Centre de publication universitaire Publication	1%
3	Submitted to American University Student Paper	1%
4	Submitted to Universidad Nacional Abierta y a Distancia, UNAD,UNAD Student Paper	1%
5	"Linear Algebra", Mathematical Formulas for Economists, 2007 Publication	1%
6	Submitted to Universitas Islam Indonesia Student Paper	1%
7	Charles R. Johnson. "An identity for the determinant", Linear and Multilinear Algebra,	1%