Wina Mutiara Rosepa
Rizki Wahyu Yunian Putra, M. Pd
Abi Fadila, M. Pd

"SUPER REFERENSI "

MATERI MATRIKS

Matematika untuk SMA/MA

ABSTRAK

Tujuan pembuatan buku ini sebagai bahan referensi belajar peserta didik sehingga dapat meningkatkan kemampuan pemahaman dalam menyelesaikan masalah tentang Matriks. Pembelajaran adalah usaha yang dilakukan secara sadar dan terencana untuk mewujudkan suasana dalam belajar mengajar yang dapat membuat peserta didik secara aktif mengembangkan potensi dirinya yakni, potensi spiritual keagamaan, pengendalian diri, kepribadian, kecerdasan, akhlak mulia, serta keterampilan yang diperlukan dirinya, masyarakat, bangsa dan negara. Media merupakan salah satu sarana yang dapat digunakan dalam pembelajaran. Buku merupakan media pembelajaran yang dapat membantu meningkatkan potensi peserta didik.

Pembuatan buku ini penulis tujukan untuk membantu peserta didik dapat belajar secara mandiri dan berperan aktif pada proses pembelajaran dalam mempersiapkan diri sebagai generasi penerus bangsa. Dalam buku ini disajikan materi, contoh soal berserta pembahasan, serta uji kompetensi sebagai latihan untuk mengetahui kemampuan menguasai materi Matriks yang sangat mudah untuk dipahami.

Kata Kunci : *Matematika, SMA, Matriks*

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum wr.wb

Bismillahirohmanirrohim

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan buku ini dengan sebaik-baiknya dan tepat waktu. Buku yang berjudul **"Super Referensi Materi Matriks"**. Tujuan dari penulis dalam membuat buku antara lain membantu mensukseskan pendidikan nasional dalam rangka mencerdaskan kehidupan bangsa, membantu peserta didik SMA/MA dalam memahami materi secara mandiri serta tambahan referensi bahan ajar oleh guru.

Proses pembuatan buku ini dapat terselesaikan dengan baik karena banyak pihak yang terlibat, penulis menyadari benar tanpa dukungan dan bantuan berbagai pihak tersebut mungkin pembuatan buku ini belum selesai. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih tak terhingga kepada semua pihak yang terlibat atas dukungan dan bantuan serta hanya Allah SWT yang mampu membalas kebaikan kalian semua (Aamiin).

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan buku ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh sebab itu dengan terbuka dan rendah hati penulis mengharapkan saran dan kritik demi penyempurnaan buku ini di masa mendatang. Semoga dengan terselesainya penulisan buku ini, dapat membangun ilmu pengetahuan dan akhirnya dapat dimanfaatkan masyarakat luas.

Bandar Lampung, Maret 2023

Wina Mutiara Rosepa

DAFTAR ISI

Halaman Judul i

Abstrak ii

Kata Pengantar iii

Daftar Isi v

Standar Isi vi

Peta Konsep viii

Materi Pendalaman

A. Pengertian Matriks 3

B. Notasi dan Ordo Matriks 3

C. Macam-Macam Matriks 5

D. Transpos Matriks 8

E. Kesamaan Dua Matriks 9

F. Operasi Matriks 10

G. Determinan Matriks 16

H. Invers Matriks 19

I. Menyelesaikan Masalah Persamaan Linear Menggunakan Matriks 23

Soal dan Pembahasan 31

Uji Kompetensi 45

Daftar Pustaka

STANDAR ISI

KOMPETENSI INTI

3. Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingintahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secaraefektif dan kreatif, serta mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan.

KOMPETENSI DASAR

3.3 Menjelaskan matriks dan kesamaan matriks dengan menggunakan masalah kontekstual dan melakukan operasi pada matriks yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, dan perkalian, serta transpos.

4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks dan operasinya.

3.4 Menganalisis sifat-sifat determinan dan invers matriks berordo 2×2 dan 3×3.

4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks berordo 2×2 dan 3×3.

MANFAAT MEMPELAJARI MATRIKS

1. Peserta didik mampu menjelaskan konsep matriks dan kesamaan matriks dengan benar setelah menggunakan buku ini.
2. Peserta didik mampu menjelaskan sifat-sifat operasi matriks dengan benar setelah menggunakan buku ini.
3. Peserta didik mampu melakukan operasi matriks dengan benar setelah menggunakan buku ini.
4. Peserta didik mampu menjelaskan sifat determinan matriks dengan benar setelah menggunakan buku ini.
5. Peserta didik mampu menentukan determinan dan invers matriks dengan benar setelah menggunakan buku ini.
6. Peserta didik mampu menggunakan operasi determinan, dan invers matriks untuk memecahkan masalah dengan benar setelah menggunakan buku ini.

PETA KONSEP

MATRIKS

Mempelajari

Konsep Matriks

Mencakup

- ✓ Pengertian Matriks
- ✓ Notasi dan Ordo Matriks
- ✓ Macam-Macam Matriks
- ✓ Transpos Suatu Matriks
- ✓ Kesamaan Dua Matriks

Operasi Matriks

Mencakup

- ✓ Penjumlahan Matriks
- ✓ Pengurangan Matriks.
- ✓ Perkalian Skalar Matriks
- ✓ Perkalian Antar matriks

Determinan Matriks

Mencakup

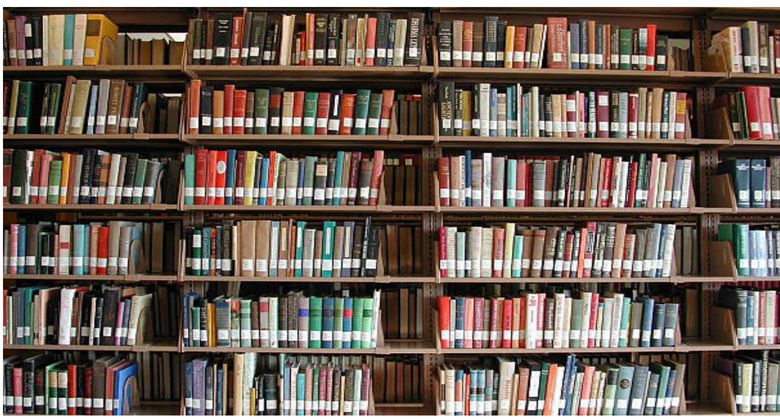
- ✓ Determinan Matriks Berordo 2 x 2 dan 3 x 3
- ✓ Jenis Matriks Berdasarkan Nilai Determinan
- ✓ Sifat-Sifat Determinan Matriks

Invers Matriks

Mencakup

- ✓ Invers Matriks Berordo 2 x 2 dan 3 x 3
- ✓ Sifat-Sifat Invers Matriks

MATERI PENDALAMAN



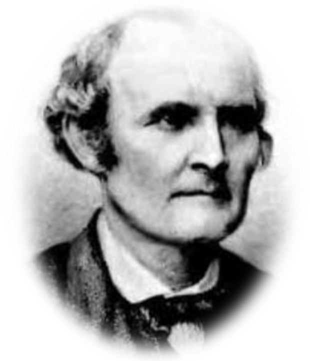
Sumber *: Internet (modifikasi penulis)*

Coba kalian perhatikan tataletak benda-benda di sekitar kalian! Sebagai contoh, susunan buku di lemari penyimpanan, posisi duduk di kelas, tataletak barang di supermarket, dan lain-lain. Tentu kalian dapat melihat susunan tersebut dapat berupa pola baris atau kolom, bukan? Bentuk susunan berupa baris dan kolom merupakan dasar konsep matriks yang akan kalian pelajari pada bab ini.

Kata Kunci

- Matriks
- Jenis Matriks
- Kesamaaan Matriks
- Transpos Matriks
- Operasi Matriks
- Determinan
- Kofaktor
- Adjoin
- Invers

Sejarah Matriks



Arthur Cayley merupakan seorang ahli matematika berkebangsaan Inggris. Dia merupakan orang pertama yang menemukan rumus matriks. Arthur Cayley lahir di Richmond, London, Inggris, pada tanggal 16 Agustus 1821. Ayahnya, Henry Cayley, adalah sepupu jauh dari Sir George Cayley sang inovator aeronautics engineer, dan diturunkan dari keluarga Yorkshire kuno. Ia menetap di Saint Petersburg, Rusia, sebagai seorang pedagang. Ibunya Maria Antonia Doughty, putri William Doughty. Arthur menghabiskan delapan tahun pertamanya di Saint Petersburg.

Pada awalnya, matriks hanya dianggap permainan karena tidak bisa diaplikasikan, tetapi pada tahun 1925, 30 tahun setelah Cayley meninggal, matriks digunakan pada mekanika kuantum. Selanjutnya matriks mengalami perkembangan yang pesat dan digunakan dalam berbagai bidang.

A. Pengertian Matriks

Matriks merupakan susunan bilangan yang diatur berdasarkan aturan baris dan kolom dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegi panjang. Susunan bilangan-bilangan atau biasanya diletakkan dalam kurung biasa ( ) atau kurung siku [ ]. Bilangan-bilangan itu biasanya dinamakan anggota atau elemen matriks. Contoh bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 14 & 1 & 98 \\ 5 & 1 & 7 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix} 25 & 01 & 22 \\ 32 & 27 & 12 \\ 45 & 76 & 89 \end{bmatrix}$$

B. Notasi dan Ordo Matriks

Matriks dilambangkan dengan huruf kapital sedangkan elemen dilambangkan dengan huruf kecil. Ukuran sebuah matriks dinyatakan dalam satuan ordo. Ordo yaitu banyaknya baris × kolom dalam matriks tersebut (tanda × memiliki makna sebagai tanda pemisahan bukan bermakna perkalian). Ordo merupakan karakteristik suatu matriks yang menjadi patokan dalam operasi-operasi antar matriks.

Banyaknya baris pada matriks adalah m, sedangkan banyaknya kolom pada matriks adalah n. Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom maka matriks A

berordo $m \times n$, yang disimbolkan dengan $A_{m\times n}$, dengan $m = 1, 2, 3, \dots$ dan $n = 1, 2, 3, \dots$

Matriks pada umumnya disimbolkan seperti berikut ini:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Baris ke} - 1 \\ \rightarrow \text{Baris ke} - 2 \\ \rightarrow \text{Baris ke} - \text{m} \end{array}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

Kolom ke-1   Kolom ke-2   Kolom ke-n

Catatan :

a_{11} bukan dibaca "a sebelas", tetapi dibaca" a satu-satu, dimana berarti elemen matriks pada baris ke-1 dan kolom ke-1

Contoh:

Baris ke-2 kolom ke-1

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 98 \\ 5 & 1 & 7 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Baris ke-3 kolom ke-3

Matriks D terdiri dari atas 3 baris dan 4 kolom. Ordo matriks D adalah 3×4 dan ditulis $D_{3\times 4}$. Elemen pada baris ke-2 kolom ke-1 = $d_{21} = 5$, sedangkan elemen pada baris ke-3 kolom ke-3 = $d_{33} = 16$.

C. Macam-Macam Matriks

1. Matriks Baris

   Matriks baris merupakan matriks yang terdiri atas satu baris saja. Pada umumnya matriks baris berordo $1 \times n$, dengan n adalah banyak kolom pada matriks.

   Contoh:

   $$P_{1\times 3} = (3 \quad 7 \quad -9) \qquad Q_{1\times 2} = (2 \quad -3)$$

2. Matriks Kolom

   Matriks kolom merupakan matriks yang terdiri atas satu kolom saja. Pada umumnya matriks kolom berorodo $m \times 1$, dengan m adalah banyak kolom pada matriks.

   Contoh:

   $$K_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad L_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

3. Matriks Persegi Panjang

   Matriks persegi panjang merupakan matriks yang jumlah barisnya tidak sama dengan jumlah kolomnya. Matriks persegi panjang memiliki ordo $m \times n$.

   Contoh:

   $$M_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Matriks Persegi (Bujur Sangkar)

Matriks persegi atau juga dikenal dengan istilah matriks bujur sangkar merupakan matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya. Sehingga ordo dari matriks persegi adalah $n \times n$.

Contoh:

$$N_{2\times2} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad N_{3\times3} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan mariks yang semua elemennya bernilai nol, kecuali elemen pada diagonal utama matriks. Diagonal utama adalah elemen-elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{11} dan a_{nn}, sedangan diagonal samping adalah elemen-elemen yang terletak pada garis hubung elemen a_{1n} dan a_{n1}.

Contoh:

$$M_{3\times3} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagonal samping Diagonal utama

6. Matriks Skalar

Matriks skalar merupakan matriks yang semua elemen diagonal utamanya bernilai tidak nol dan bernilai sama.

Contoh:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Matriks Identitas (Satuan)

Matriks persegi dengan elemen-elemen pada diagonal utama dengan 1(satu) dan elemen-elemen lain sama dengan nol.

Contoh:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Matriks Segitiga

Matriks segitiga merupakan matriks persegi dengan elemen-elemen di atas atau di bawah diagonal utama semuanya nol.

Matriks segitiga dibagi menjadi dua yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas adalah matriks dengan semua elemen di bawah diagonal utama bernilai nol, sedangkan matriks segitiga bawah adalah matriks dengan semua elemen di atas diagonal utama bernilai nol.

Contoh:

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks Segitiga Atas | Matriks Segitiga Bawah

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriks Segitiga Atas | Matriks Segitiga Bawah

9. Matriks nol

   Matriks nol merupakan matriks yang semua elemennya bernilai nol. Matriks ini dilambangkan dengan $O_{m\times n}$.

   Contoh:

$$O_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D. Transpos Suatu Matriks

Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka transpos dari A dinotasikan sebagai A^T yaitu suatu matriks $n \times m$

yang dihasilkan dari saling menukarkan antara baris dan kolom matriks A.

Contoh:

$$A_{3\times1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow {A^T}_{1\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow {A^T}_{2\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jika hasil sebuah matriks sama dengan transposnya $(A = A^T)$ maka matriks tersebut adalah matriks simetri

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 4 & 6 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow {A^T}_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 4 & 6 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

E. Kesamaan Dua Matriks

Dalam matriks dikenal dengan adanya kesamaan dari dua matriks yang didefinisikan sebagai berikut.

Dua buah matriks A dan B dikatakan sama $(A = B)$, jika ordo yang dimiliki keduanya sama, dan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak) sama.

Contoh 1:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} \frac{6}{3} & 1 & 3^2 \\ 0 & \sqrt{9} & 5 \\ \sqrt{25} & \frac{4}{-2} & 7 \end{pmatrix}$

Semua elemen yang seletek pada matriks A dan matriks B bernilai sama sehingga matriks $A = B$.

Contoh 2:

$$M = \begin{pmatrix} x & 18 & -5 \\ 11 & 7 & y \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } N = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -5 \\ 11 & 7 & 3x \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Jika $M = N$, tentukan nilai y?

Jawab:

Karena $M = N$ maka

$x = 6$

$y = 3x$

Subsitusikan nilai x ke $y = 3x$

Maka nilai $y = (3)(6)$

$= 18$

Jadi, nilai y adalah 18.

F. Operasi Matriks

1. Penjumlahan Matriks

Jika A dan B dua buah matriks berordo sama maka penjumlahan kedua matriks tersebut adalah penjumlahan elemen-elemen yang seletak pada kedua matriks, ilustrasinya sebagi berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+p & b+q & c+r \\ d+s & e+t & f+u \end{pmatrix}$$

Pada penjumlahan matriks berlaku sifat-sifat:

a. Sifat Komutatif, $A + B = B + A$
b. Sifat Asosiatif, $(A + B) + C = A + (B + C)$
c. Sifat Lawan/negatif, $A + (-A) = O$, dengan O adalah matiks nol
d. Sifat Identitas , $A + O = O + A = A$
e. Sifat Transpos, $(A + B)^T = A^T + B^T$

Contoh :

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$Z = X + Y$$

$$Z = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi, $X + Y$ adalah $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Pengurangan Matriks

Jika A dan B dua buah matriks berordo sama maka pengurangan kedua matriks tersebut adalah pengurangan elemen-elemen yang seletak pada kedua matriks, ilustrasinya sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a-p & b-q & c-r \\ d-s & e-t & f-u \end{pmatrix}$$

Dapat pula diartikan sebagai penjumlahkan matriks A dengan lawan negatif dari B, dituliskan:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Contoh:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$Z = X - Y$$

$$Z = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$$

Jadi, $X + Y$ adalah $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Perkalian Skalar dengan Matriks

Jika A adalah sebuah matriks dan k adalah suatu bilangan real maka hasil perkalian skalar dan matriks (kA) berupa matriks baru yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen matriks A dengan k. Dalam matematika simbol perkalian adalah $\times$; . ; ( ).

Perkalian Skalar pada umumnya disimbolkan seperti berikut ini:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{maka}$$

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{22} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & k\,a_{33} \end{pmatrix}$$

Pada perkalian skalar berlaku sifat-sifat:

a. Sifat distributif, $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

b. Sifat distributif, $k(A + B) = kA + kB$

c. Sifat asosiatif, $k_1(k_2A) = k_1k_2A$

Contoh:

Diketahui matriks $W = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Tentukan nilai $3W$?

Jawab:

$$3W = 3\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \times 4 & 3 \times 3 & 3 \times 2 \\ 3 \times 1 & 3 \times 5 & 3 \times 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 3 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Jadi, $3W$ adalah $\begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 3 & 15 & 18 \end{pmatrix}$.

4. Perkalian Matriks

Perkalian dua matriks ini bisa dilakukan ketika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Perkalian matriks tersebut akan menghasilkan suatu matriks dengan jumlah baris matriks pertama dan jumlah kolom matriks kedua.

$$\boxed{A_{m\times n} \,.\, B_{p\times q} = C_{m\times q}}\text{, dengan } n = p.$$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a.m + b.o & a.n + b.p \\ c.m + d.o & c.n + d.p \end{pmatrix}$$

Pada perkalian matriks berlaku sifat-sifat:

a. Sifat tidak komutatif, $AB \neq BA$
b. Sifat asosiatif, $A(BC) = (AB)C$
c. Sifat asosiatif, $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
d. Sifat distributif kiri, $A(B + C) = AB + AC$
   $A(B - C) = AB - AC$
e. Sifat distributif kanan, $(B + C)A = BA + CA$
   $(B - C)A = BA - CA$
f. Jika $AB = O$ belum tentu $A = O$ atau $B = O$
g. Jika $AB = AC$ belum tentu $B = C$
h. $(AB)^T = B^T A^T$
i. $IA = AI = A$

Contoh:

Diketahui $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $R = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Tentukan WR ?

Jawab:

$$WR = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.5 + 2.7 & 1.6 + 2.8 & 1.9 + 2.0 \\ 3.5 + 4.7 & 3.6 + 4.8 & 3.9 + 4.0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 22 & 9 \\ 43 & 50 & 27 \end{pmatrix}$$

Jadi, WR adalah $\begin{pmatrix} 19 & 22 & 9 \\ 43 & 50 & 27 \end{pmatrix}$.

5. Perpangkatan Matriks

Perpangkatan matriks hanya berlaku pada matriks persegi. Misalkan matriks A adalah matriks persegi $n \times n$ maka $A^2 = AA, A^3 = AA^2, A^4 = AA^3$ dan seterusnya. Pada matriks persegi berlaku pula $A^0 = I$ dan $A^n = A.A^{n-1}$, dengan $n > 0$. Jika r dan s adalah bilangan bulat maka berlaku $A^r . A^s = A^{(r+s)}$ dan $(A^r)^s = A^{rs}$.

Contoh:

Diketahui $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Tentukan W^2 ?

Jawab:

$$W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1 + 2.3 & 1.2 + 2.4 \\ 3.1 + 4.3 & 3.2 + 4.4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Jadi, W^2 adalah $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

G. Determinan Matriks

Determinan hanya dimiliki matriks-matriks persegi. Determinan matriks dinotasikan dengan | | atau det ( ).

1. Determinan Matriks Berordo 2 × 2

Jika Matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka:

$$\det A = |A|$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\det A = a.d - b.c$$

Contoh :

Nilai determinan dari $P = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ adalah...

Jawab:

$$|P| = (8.4) - (4.3)$$

$$|P| = 32 - 12$$

$$|P| = 20$$

Jadi, determinan P adalah 20.

2. Determinan Matriks Berordo 3×3

Untuk mencari determinan matriks berordo 3×3 dapat digunakan dua metode, sebagai berikut:

a. Metode Sarrus

Jika matriks $A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ q & w & x \end{pmatrix}$ Maka:

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad (-)\,(-)\,(-) \\ |A| = \left(\begin{matrix} p & q & r \\ s & t & u \\ q & w & x \end{matrix}\right) \begin{matrix} p & q \\ s & t \\ v & w \end{matrix} \\ (+)\,(+)(+) \quad\quad\quad\quad \end{array}$$

$$|A| = (p.t.x + q.u.v + r.s.w) -$$
$$(r.t.v + q.s.x + p.u.w)$$

Sebagai ketentuan di atas perlu di perhatikan bahwa tidak berlaku pada matriks 4×4 ataupun yang lebih tinggi lagi.

Contoh :

$$\text{Matriks } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$|B| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$= (1.3.4 + 2.2.1 + 3.4.5) -$$
$$(3.3.1 + 1.2.5 + 2.4.4)$$
$$= (12 + 4 + 60) - (9 + 10 + 32)$$
$$= 76 - 51$$
$$= 25$$

Jadi, determinan B adalah 25.

b. Metode Kofaktor

Jika matriks $A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ q & w & x \end{pmatrix}$. Maka:

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{matrix} (+) & (-) & (+) \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ q & w & x \end{vmatrix} \end{array}$$

$$|A| = p\begin{vmatrix} t & u \\ w & x \end{vmatrix} - q\begin{vmatrix} s & u \\ q & x \end{vmatrix} + r\begin{vmatrix} s & t \\ q & w \end{vmatrix}$$

Contoh:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$|Q| = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$|Q| = 2(27 - 40) - 4(9 - 35) + 6(8 - 21)$$
$$|Q| = 2(-13) - 4(-26) + 6(-13)$$
$$|Q| = 0$$

Jadi, determinan Q adalah 0.

3. Jenis Matriks Berdasarkan Nilai Determinan

Berdasarkan nilai determinannya, matriks dibagi menjadi dua yaitu matriks singular dan matriks non singular :

a. Jika det $(A) = 0$, matriks A disebut matriks singular.

b. Jika det $(A) \neq 0$, matriks A disebut matriks nonsingular.

4. Sifat-Sifat Determinan Matriks

Misalkan A dan B merupakan matriks persegi, maka berlaku sifat-sifat berikut.

a. $\det(A) = \det(A^T)$

b. $\det(kA) = k^2 \det(A)$ untuk $A_{2\times 2}$ dan

$\det(kA) = k^3 \det(\mathrm{A})$ untuk $A_{3\times 3}$

c. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

d. $\det(A^n) = (\det(\mathrm{A}))^n$

H. Invers Matriks

Misalkan A dan B merupakan dua matriks persegi dengan ordo sama. Jika matriks A dan B memenuhi hubungan $AB = BA = I$,dikatakan A dan B merupakan dua matriks yang saling invers. Matriks B disebut matriks perkalian dari matriks A dan dinotasikan dengan A^{-1}.

Matriks A disebut invers perkalian dari matriks B dan dinotasikan dengan B^{-1}.

Contoh :

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ dan}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Oleh karena berlaku $AB = BA = I$ maka A dan B merupakan dua matriks yang saling invers. Invers dari matriks A adalah $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ dan invers dari matriks B adalah $B^{-1} = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, sehingga dapat ditulis secara matematis sebagai berikut :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adjoin } (A)}$$

1. **Rumus invers matriks**
   a. **Rumus Invers Matriks Berordo 2×2**

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, invers dari metriks A adalah :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adjoin } (A)$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dengan syarat $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

Jika $\det(A) = 0$, A merupakan matriks singular, maka matriks A tidak mempunyai invers.

Contoh:

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$. Tentukan invers A!

Jawab:

$$|A| = a.d - b.c$$
$$|A| = (3)(3) - (1)(10)$$
$$|A| = 9 - 10$$
$$|A| = -1$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adjoin } (A)$$
$$= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$$

Jadi, invers A adalah $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$.

b. Rumus Invers Matriks Berordo 3 × 3

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, invers dari matriks A adalah :

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ dengan

$$det(A) = |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

c. Sifat- Sifat Invers Matriks

Jika A dan B merupakan matriks persegi yang berordo sama dan mempunyai invers, berlaku sifat-sifat berikut:

a. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
c. $(A^{-1})^{-1} = A$
d. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ dengan $n = 0, 1, 2, 3, ...$
e. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
f. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
g. $(kA^{-1})^n = k^n(A^{-1})^n$

I. Menyelesaikan Masalah Persamaan Linear dengan Matriks

1. Metode Invers

a. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV)

Diberikan sistem persamaan linear dua variabel sebagai berikut:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Sistem persamaan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{B}.$$

A dinamakan matriks koefisien.

Diperoleh persamaan matriks $AX = B$.

Penyeselesaian adalah $X = A^{-1}B$.

b. Sistem Persamaan Linear Dengan Tiga Variabel (SPLTV)

Sistem persamaan linear dengan tiga variabel sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Sistem persamaan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Diperoleh persamaan matriks $AX = B$. Penyelesaian adalah $X = A^{-1}B$.

2. Metode Cramer

a. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Diberikan sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) sebagai berikut:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Didefinisikan determinan utama (D) yaitu dari matriks koefisien-koefisien x dan y.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{21} \end{vmatrix}$$

Didefinisikan determinan variabel $x(D_x)$ yaitu determinan dari matriks yang diperoleh dengan menggantikan koefisien-koefisien variabel x dari determinan utama dengan bilangan-bilangan diruas kanan.

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} \\ b_2 a_{22} \end{vmatrix}$$

Didefinisikan determinan variabel $y\left(D_y\right)$ yaitu determinan dari matriks yang diperoleh dengan menggantikan koefisien-koefisien variabel y dari determinan utama dengan bilangan-bilangan diruas kanan.

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 \\ a_{21} b_2 \end{vmatrix}$$

Nilai x dan y ditentukan dengan rumus:

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D} \; dan \; y = \frac{D_y}{D}}$$

Banyaknya penyelesaian suatu SPL dapat dilihat dari nilai-nilai determinannya.

- Jika $D \neq 0$ maka SPL mempunyai satu penyelesaian.
- Jika $D = 0, D_x \neq 0,$ dan $D_y \neq 0$ maka SPL tidak mempunyai penyelesaian.
- Jika $D = D_x = D_y = 0$ maka SPL mempunyai tak berhingga penyelesaian.

b. Sistem Persamaan Linear Dengan Tiga Variabel

Penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel dapat ditentukan sebagai berikut.

Determinan utama $= D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$

Determinan variabel $x = D_x = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$

Determinan variabel $y = D_y = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}$

Determinan variabel $z = D_z = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$

Nilai x, y dan z ditentukan dengan rumus:

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, dan\ z = \frac{D_z}{D}}$$

Contoh 1:

Siswa kelas XI-A sebanyak 40 anak. Perbandingan antara banyak siswa laki-laki dan perempuan adalah $2:3$. Tentukan:

a) Perkalian matriks yang menggambarkan hubungan antara jumlah siswa, banyak siswa laki-laki, dan banyak siswa perempuan.
b) Banyak siswa perempuan.

Jawab :

a) Misalkan :

$x = $ banyak siswa laki $-$ laki

$y = $ banyak siswa perempuan

diperoleh SPLDV berikut.

$x + y = 40$

$x : y = 2 : 3$

- $3x = 2y$
- $3x - 2y = 0$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40\\0\end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40\\0\end{pmatrix}$

- ➢ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}40\\0\end{pmatrix}$
- ➢ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{-2-3}\begin{pmatrix}-2 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40\\0\end{pmatrix}$
- ➢ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix}-80 - 0\\-120 + 0\end{pmatrix}$
- ➢ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\24\end{pmatrix}$

Diperoleh :

Banyak siswa laki-laki$= x = 16$

Banyak siswa perempuan $= y = 24$

Jadi, banyak siswa perempuan 24 anak.

Contoh 2:

Tia pergi ketoko buku. Tia membeli 2 buku tulis, 1 pulpen, dan 1 pensil seharga Rp. 6.500,00. Harga 2 pulpen dan 1 pensil sama denga dua kali harga sebuah buku tulis. Selisih harga sebuah buku tulis dan harga sebuah pensil sama dengan dua per tiga kali harga sebuah pulpen. Tentukan :

a) Harga sebuah buku tulis;

b) Harga 2 buku tulis, 1 pulpen, dan 2 pensil.

Jawab :

a) Misalkan :

$x =$ harga 1 buku tulis

$y =$ harga 1 pulpen

$z =$ harga 1 pensil

Dari permasalahan tersebut diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{matrix}$$

$$= (2(-2)(-3) + 1(-1)3 + 1.2(-2))$$
$$-(1(-2)3 + 2(-1)(-2) + 1.2(-3))$$
$$= (12 - 3 - 4) - (-6 + 4 - 6)$$
$$= 13$$

$$D_x = \left|\begin{matrix} 6.500 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6.500 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

$$= (6.500(-2)(-3) + 1(-1)0 +$$
$$1.0(-2)) - (1(-2)0 +$$
$$6.500(-1)\,(-2) + 1.0(-3))$$
$$= (39.000 + 0 + 0) - (0 + 13.000 + 0)$$
$$= 26.000$$

Diperoleh :

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$= \frac{26.000}{13}$$

$$= 2.000$$

Jadi, harga 1 buku tulis Rp 2.000,00.

b) $$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6.500 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 6.500 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$

$$= (2.0(-3) + 6.500(-1)3 + 1.2.0 -$$

$$(1.0.3 + 2(-1)0 + 6.500(2)(-3))$$

$$= (0 - 19.500 + 0) - (0 + 0 - 39.000)$$

$$= 19.500$$

Diperoleh :

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$= \frac{19.500}{13}$$

$$= 1.500$$

Jadi, harga 1 pulpen Rp 1.500,00.

c) $$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6.500 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{matrix}$$

$$= \big(2(-2)0 + 1.0.3 + 6.500(2)(-2)\big) -$$

$$(6.500(-2)3 + 2.0(-2) + 1.2.0)$$

$$= (0 + 0 - 26.000) - (-39.000 + 0 + 0)$$

$$= -26.000 + 39.000$$

$$= 13.000$$

Diperoleh :

$$z = \frac{D_z}{D}$$

$$= \frac{13.000}{13}$$

$$= 1.000$$

Jadi, harga 1 pensil Rp 1.000,00.

$$2x + y + 2z = 2(2.000) + 1.500 + 2(1.000)$$

$$= 4.000 + 1.500 + 2.000$$

$$= 7.500$$

Jadi, harga 2 buku tulis,1 pulpen, dan 2 pensil adalah Rp.7.500,00.

SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2a & 4 & 6 \\ 8 & 10 & b \\ 4c & 5 & 12 \end{pmatrix}$ dan

   $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 4a \\ b & 5 & 12 \end{pmatrix}$, Jika $A = B$, nilai c adalah

   Pembahasan:

   Matriks A dan B adalah sama karena kedua matriks tersebut berordo sama dan elemen-elemen yang seletak sama, maka:

   $$A = B \rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 4 & 6 \\ 8 & 10 & b \\ 4c & 5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 4a \\ b & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

   - $2a = 8$

     $a = 4$
   - $b = 4a$

     $b = 4 \times 4$

     $b = 16$
   - $4c = b$

     $4c = 16$

     $c = \frac{16}{4}$

     $c = 4$

   Jadi, nilai c adalah 4.

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Matriks $(A + 2B) - (2B + 2C)$ adalah

   Pembahasan:

   $$(A + 2B) - (2B + 2C) = A + 2B - 2B - 2C$$

   $$(A + 2B) - (2B + 2C) = A - 2C$$

   $$A - 2C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   $$A - 2C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

   $$A - 2C = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

   Jadi, matriks $(A + 2B) - (2B + 2C)$ adalah $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ invers matriks dan determinan matriks tersebut adalah

   Pembahasan:

   $$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

   $$A^{-1} = \frac{1}{(-8)(5) - (6)(7)}\begin{pmatrix} 5 & -(-6) \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$$

   $$A^{-1} = \frac{1}{-40 + 42}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$$

   $$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{-7}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

Jadi, invers matriks A adalah $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{-7}{2} & -4 \end{pmatrix}$ dan determinan matriks A adalah 2.

4. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 5 & a \\ 3b & 5c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2a+2 & a+8 \\ a+4 & 3a-b \end{pmatrix}$.

   Jika $2A = B^T$, nilai c yang memenuhi adalah

   Pembahasan:

   - Transpos matriks B

     $$B = \begin{pmatrix} 2a+2 & a+8 \\ a+4 & 3a-b \end{pmatrix} \rightarrow B^T$$

     $$= \begin{pmatrix} 2a+2 & a+4 \\ a+8 & 3a-b \end{pmatrix}$$

   - $2A = B^T$

     $$2\begin{pmatrix} 5 & a \\ 3b & 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 & a+4 \\ a+8 & 3a-b \end{pmatrix}$$

     $$\begin{pmatrix} 10 & 2a \\ 6b & 10c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 & a+4 \\ a+8 & 3a-b \end{pmatrix}$$

   Dari persamaan matriks diatas dapat diperoleh nilai a

   $$10 = 2a + 2$$

   $$2a = 10 - 2$$

   $$a = 4$$

Untuk memperoleh nilai b, substitusikan nilai $a = 4$ pada persamaan baris ke-2 kolom ke-1:

$$6b = a + 8$$

$$6b = a + 8$$

$$b = \frac{12}{6} = 2$$

Untuk memperoleh nilai c, substitusikan nilai a dan b pada persamaan baris ke-2 kolom ke-2 pada persamaan matriks di atas:

$$10c = 3a - b$$

$$10c = 3(4) - 2$$

$$10c = 10$$

$$c = \frac{10}{10} = 1$$

Jadi, nilai c adalah 1.

5. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2x & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & x \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2y & 26 \\ -2x & -6 \end{pmatrix}$, jika $AB = C$, determinan dari matriks C invers adalah

Pembahasan:

$$AB = C$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 26 \\ -2x & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x(4) + 3(2) & 2x(5) + 3x \\ -2(4) + 2(2) & -2(5) + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 26 \\ -2x & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8x+6 & 13x \\ -4 & -10+2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 26 \\ -2x & -6 \end{pmatrix}$$

Mencari nilai x

$13x = 26$

$x = \frac{26}{13}$

$x = 2$

Substitusikan nilai x ke persamaan yang memiliki variabel y

$8x + 6 \quad = 2y$

$8(2) + 6 = 2y$

$2y = 16 + 6$

$y = \frac{22}{2}$

$y = 11$

$3x^2 - y = 3(2)^2 - 11$

$= 3(4) - 11$

$= 12 - 11$

Jadi, penyelesaian $3x^2 - y$ adalah 1.

6. Nilai p yang memenuhi persamaan matriks

$$2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2p \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$ adalah

Pembahasan:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2p \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 & 2-4 \\ 0+2 & 1+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2+2p \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2 + 2p = -2$$

$$2p = -4$$

$$p = -2$$

Jadi, nilai p yang memenuhi persamaan matriks adalah -2.

7. Matriks X yang memenuhi : $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$ adalah

Pembahasan:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{(4.5)-(-3.-1)} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{20-3} \begin{pmatrix} 35-18 & 90+63 \\ 7-24 & 18+84 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & 153 \\ -17 & 102 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks X adalah $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

8. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nilai $x - y$ adalah

Pembahasan:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10-2x & (-5-2x-2y) \\ 18-4x & (-9-4x-4y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari persamaan di atas diperoleh

- $10 - 2x = 1 \rightarrow x = \frac{9}{2}$
- $-5 - 2x - 2y = 0$

Untuk $x = \frac{9}{2} \rightarrow -5 - 2\left(\frac{9}{2}\right) - 2y = 0$

$$\rightarrow -5 - 9 - 2y = 0$$

$$y = -7$$

Jadi, $x - y = \frac{9}{2} - \frac{14}{2} = \frac{23}{2}$.

9. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ dan det $(AB) = 12$ maka nilai x adalah

   Pembahasan:

$$\text{Det } (AB) = 12$$

$$|AB| = 12$$

$$|A||B| = 12$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12$$

$$(2x - 0)(-2 - 0) = 12$$

$$-4x = 12$$

$$x = -3$$

Jadi, nilai x adalah -3.

10. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

    Nilai invers matriks AB adalah

    Pembahasan:

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{(-2)(-1)-(-1)(-4)}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, invers matriks AB adalah $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

11. Diketahui jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Nilai penjumlahan matriks A dan B adalah

    Pembahasan:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+2 \\ 2+4 & 4+5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

12. Diketahui jika $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 7 \\ -8 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Nilai hasil pengurangan dari matriks A dan B adalah

Pembahasan:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 7 \\ -8 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{6} & -1 - 7 \\ 6 - (-8) & -\frac{1}{5} - (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & -8 \\ 14 & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks $A - B = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & -8 \\ 14 & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

13. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Nilai dari $A - (B + C)$ adalah

Pembahasan:

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - (B + C) = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - (B + C) = \begin{pmatrix} 8 - 11 & 11 - 9 \\ 7 - 8 & 9 - 6 \end{pmatrix}$$

$$A - (B + C) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, nilai dari $A - (B + C)$ adalah $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

14. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nilai dari matriks AB adalah

Pembahasan:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2.2 + 3.1 \\ 1.2 + 2.1 \\ 3.2 + 4.1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 2+2 \\ 6+4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Jadi, nilai matriks AB adalah $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

15. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ dan $k = -2$, maka kA adalah

    Pembahasan:

    $$kA = -2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

    $$kA = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$$

    Jadi, kA adalah $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$.

16. Nilai determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ adalah

    Pembahasan:

    $$\det A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

    $$= (4 \times (-3) - ((-2) \times 8)$$

    $$= -12 - (-16)$$

$= 4$

Jadi, det A adalah 4.

17. Nilai determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ adalah

Pembahasan:

$$\det A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{matrix}$$

$$= (2.2.0 + (-1)(-1)(-3) + (3.5.4) - (3.2(-3) + (2(-1)4 + (-1)5.0)$$

$$= (0 + (-3) + 60) - ((-18) + (-8) - 0)$$

$$= 67$$

Jadi, determinan matriks A adalah 67.

18. Nilai invers matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ adalah

Pembahasan:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(2.7 - 3.5)} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14 - 15} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -1\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Jadi, A^{-1} adalah $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

19. Nilai invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ adalah

Pembahasan:

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ +\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 9 & -9 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 9 & -4 \\ 1 & -9 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$= (2.2.3 + 3.4.3 + 5.1.2) - (5.2.3 + 2.4.2 + 3.1.3)$

$= 12 + 36 + 10 - 30 - 16 - 9$

$= 3$

Sehingga:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ \text{adj}\ A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 9 & -4 \\ 1 & -9 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{9}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{9}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Jadi, invers matriks A adalah $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{9}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{9}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

20. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Apabila $B - A = C^T$ dan $C^T =$ transpos matriks C, maka nilai xy adalah

Pembahasan:

$$\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y-2 & 3 \\ 2 & y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari persamaan di atas diperoleh:

- $y - 4 = 1$
- $y = 5$

- $x + y - 2 = 7$
- $x + 5 - 2 = 7$
- $x = 4$

Jadi, nilai $xy = (4)(5) = 20$.

DAFTAR PUSTAKA

Aisyah Kareena Putri dan Tim.2017.*Rumus Ekspres Matematika SMA/MA*.Jakarta: PT Kompas Ilmu

BBM, T. 2015. *Big Book Matematika SMA Kelas 1, 2 dan 3*. Jakarta: Penerbit Cmedia Imprint Kawan Pustaka.

Ngapiningsih, Miyanto, dan Noviana Endah Santoso. 2019. *Matematika untuk Kelas XI SMA/MA*. Yogyakarta: Intan Pariwara.

Sukino. 2020. *Penuntun penyelesaian Matematika Wajib.* Bandung: Yrama Widya.

Tim Kreatif CCM.2015. *Cara Cepat Menguasai Matematika SMA/MA*. Jakarta : PT Bumi Aksara.

Tim Tentor Master.2018.*Wangsit Pawang Soal Sulit SBMPTN Saintek 201-2022*.Jakarta:PT Gramedia Wediasarana Indonesia

BIOGRAFI

Wina Mutiara Rosepa lahir di Kedaton, 11 Juni 1998. Anak pertama dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Bapak Anasrullah, SH dan Ibu Rohaidawati.

Jenjang pendidikan Sekolah Dasar Negeri 1 Kedaton(2010),Sekolah Menengah Pertama Muhammadiah 1 Kalianda(2013), Sekolah Menengah Atas Negeri 2 Kalianda selesai(2016), melanjutkan kuliah di UIN Raden Intan Lampung dengan Program Studi Pendidikan Matematika. Buku Super Referensi Materi Matriks Matematikauntuk SMA/MA ini merupakan bahan ajar yang dibuat guna memenuhi tugas akhir skrip. Buku ini dibuat untuk dapat bermanfaat serta sebagai referensi pendidik dan peserta didik dalam pembelajaran.