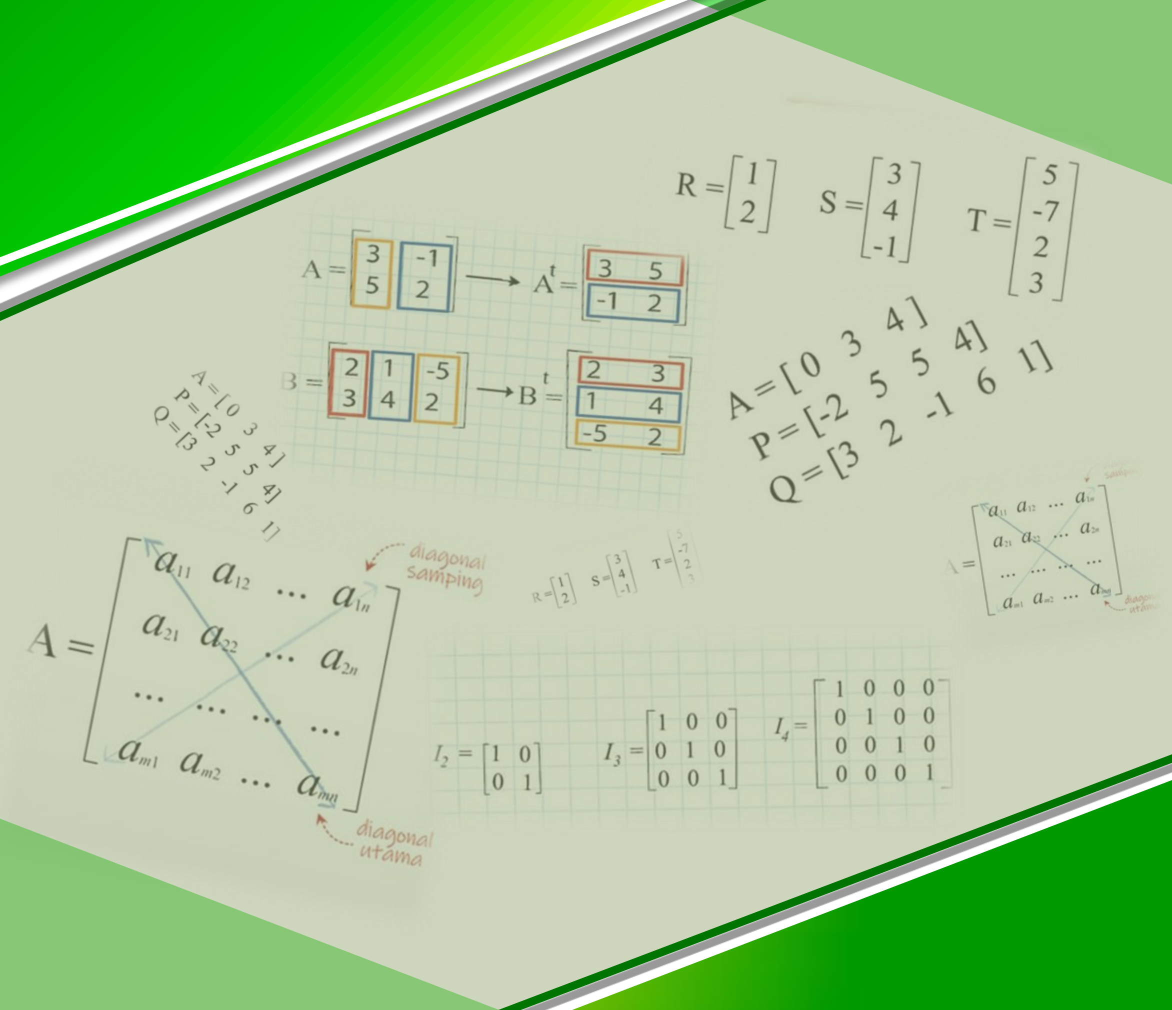
Kelas
XI
Semester
Ganjil

Buku

MATRIKS

Untuk SMA/MA/SMK/MAK



Ekky May Asih
Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd
Siska Andriani, M.Pd

ABSTRAK

Tujuan dikembangkanya buku ini yaitu agar dapat digunakan oleh tenaga kependidikan dalam upayanya memudahkan proses belajar mengajar siswa SMA/SMK kelas XI pada materi matriks. Pendidikan merupakan usaha sadar dan terencana untuk mewujudkan suasana belajar dan proses pembelajaran secara aktif, mengembangkan potensi diri untuk memiliki kekuatan spiritual keagamaan, kepribadian, kecerdasan, serta keterampilan yang diperlukan masyarakat. Media merupakan salah satu sarana yang dibutuhkan dan digunakan dalam kegiatan pendidikan. Buku merupakan salah satu media pembelajaran yang dapat digunakan oleh tenaga kependidikan untuk meningkatkan potensi peserta didik. Penyampaian materi pada buku ini dibuat dengan bahasa yang baik, mudah dipahami dan mendidik.

Buku ini bertujuan untuk meningkatkan kemampuan peserta didik dalam proses belajar mengajar agar peserta didik dapat belajar secara mandiri. Buku ini dilengkapi dengan soal serta pembahasan yang mudah untuk dipahami oleh peserta didik.

Kata Kunci : Matematika, SMA, Matriks

KATA PENGANTAR

Puji Syukur Kehadirat Allah SWT atas rahmat serta hidayah-Nya, sehingga kami dapat menyelesaikan buku ini. Buku ini dibuat sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Pendidikan pada Fakultas Tarbiyah dan Keguruan di Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung yang mana nantinya dapat digunakan sebagai bahan ajar dalam proses belajar mengajar peserta didik Sekolah Menengah Atas (SMA/SMK).

Semoga buku ini dapat bermanfaat khususnya bagi peserta didik sebagai pedoman dalam menyelesaikan berbagai soal terkait materi matriks.

Sangat disadari sepenuhnya bahwa baik dalam penulisan dan penyampaian materi dalam buku ini masih jauh dari kata sempurna, oleh karena itu dengan terbuka dan rendah hati penulis mengharapkan saran dan kritik yang konskruktif demi penyempurnaan buku ini agar dapat membangun ilmu pengetahuan dan pada akhirnya dapat dimanfaatkan oleh masyarakat luas.

Bandar Lampung,   Maret 2023

Penulis,

Ekky May Asih

KOMPETENSI DASAR DAN INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

Kompetensi Dasar (KD)

3.3. Menjelaskan matriks dan kesamaan matriks dengan menggunakan masalah kontekstual dan melakukan operasi pada matriks yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, perkalian dengan matriks, transpose matriks, determinan matriks, dan invers matriks.

4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks dan operasinya.

Identitas Pencapaian Kompetensi (IPK)

3.3.1 Menjelaskan syarat kesamaan dua matriks.

3.3.2 Memahami transpose matriks.

3.3.3 Menyusun kesamaan matriks dengan memperhatikan ordo matriks.

3.3.4 Menentukan hasil operasi matriks dengan menggunakan sifat-sifat pada operasi matriks.

4.3.1 Menentukan penyelesaian masalah kontekstual dengan menggunakan konsep kesamaan matriks.

KEMENTERIAN AGAMA
UIN RADEN INTAN LAMPUNG
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN

Alamat: Jl. Letkol H. Endro Suratmin Sukarame Bandar Lampung Telp. (0721) 703260

PERSETUJUAN

Judul Buku : **Matriks untuk SMA/MA/SMK/MAK**
Nama : **Ekky May Asih**
NPM : **1711050156**
Jurusan : **Pendidikan Matematika**
Fakultas : **Tarbiyah** dan Keguruan

MENYETUJUI

Untuk dimunaqosyahkan dan dipertahankan dalam Sidang
Munaqosyah Fakultas Tarbiyah dan Keguruan
UIN Raden Intan Lampung

Pembimbing I	**Pembimbing II**
Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd.	**Siska Andriani, S. Si., M.Pd.**
NIP. 198906052015031004	**NIP. 198808092015032004**

Mengetahui
Ketua Jurusan Pendidikan Matematika

Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd
NIP. 198402282006041004

iii

KEMENTERIAN AGAMA
UIN RADEN INTAN LAMPUNG
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN
Alamat: Jl. Letkol H. Endro Suratmin Sukarame Bandar Lampung Telp. (0721) 703260

PENGESAHAN

Buku dengan judul : **Matriks untuk SMA/MA/SMK/MAK,** disusun oleh: **Ekky May Asih**, NPM. **1711050156**, Jurusan **Pendidikan Matematika** telah diujikan dalam sidang Munaqasyah Fakultas Tarbiyah dan Keguruan pada hari/tanggal: **Senin, 17 April 2023, pukul 10:00-12:00 WIB**

TIM MUNAQASYAH

Ketua	**: Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd.**	(..................)
Sekretaris	**: Arini Alhaq, M.Pd.**	(..................)
Penguji Utama	**: Fredi Ganda Putra, M.Pd.**	(..................)
Penguji Pendamping I	**: Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd.**	(..................)
Penguji Pendamping II	**: Siska Andriani, S.Si., M.Pd.**	(..................)

Mengetahui,
Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan

Prof. Dr. Hj. Nirva Diana, M.Pd.
NIP. 196408281988032002

iv

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Yang bertandatangan di bawah ini :

Nama (*)	: Ekky May Asih
Alamat	: Ds. Tebat Jaya RT 002/RW 004, Kec. Buay Madang, Kab. OKU Timur
NIK	: 1608034405990002
Telp./HP	: 082377476167

menyatakan dengan sesungguhnya, bahwa:

Judul	: Buku Matriks untuk SMA/MA/SMK/MAK/ Kelas XI Semester Ganjil
Penulis (**)	: Ekky May Asih Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd Siska Andriani, M.Pd

adalah benar merupakan karya asli yang dibuat untuk diterbitkan dan disebarluaskan secara umum, melalui:

Penerbit	: Edupedia Publisher
Alamat	: Blok Salasa RT 004/RW 005, Ds. Trajaya, Kec. Palasah, Kab. Majalengka

Demikian surat ini dibuat dengan sebenar-benarnya serta akan menjadi pertanggungjawaban kami jika terdapat penyalahgunaan dan akibat yang ditimbulkannya.

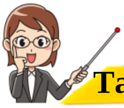
Bandar Lampung, 3 Mei 2023

Penanggung jawab Penerbit,	Penulis,
EDUPEDIA	METERAI TEMPEL 10000
(Nia Kania)	(Ekky May Asih)

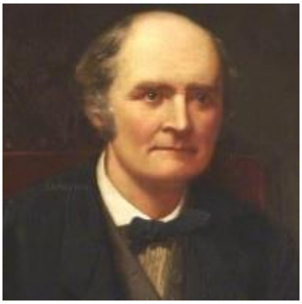
Catatan:
- * Cantumkan nama penulis pertama
- ** Cantumkan nama semua penulis

DAFTAR ISI

MATRIKS



Taukah kamu siapa pemenu matriks ?



Arthur Cayley lahir di Inggris pada tanggal 16 Agustus 1821. Dalam pendidikanya, Cayley merupakan mahasiswa jurusan Hukum dan ia juga pernah menjadi pengacara. Di usianya yang ke-17 tahun, tepatnya pada tahun 1859, Cayley berhasil menemukan matriks. Gagasan matriks pertama kali diperkenalkan oleh Arthur Carley (1821-1895) pada tahun 1859 di Inggris dalam sebuah studi sistem persamaan linear dan transformasi linear. Namun pada awalnya, matriks hanya dianggap permainan karna tidak bisa diaplikasikan. Hingga pada tahun 1925 tepatnya 30 tahun setelah Cayley meninggal matriks digunakan pada mekanika kuantum. Selanjutnya matriks mengalami perkembangan yang pesat dan digunakan dalam berbagai bidang.

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering berhadapamn dengan persoalan yang apabila kita telusuri ternyata merupakan masalah matematika. Dengan mengubahnya kedalam bahasa atau persamaan matematika, maka persoalan tersebut akan lebih mudah diselesaikan. Namun, terkadang kita juga mengalami kesulitan jika suatu persoalan seringkali memuat lebih dari dua persamaan atau variabel. Bahkan di Negara maju, sering ditemukan model ekonomi yang harus dipecahkan dengan suatu sistem persamaan dengan puluhan atau bahkan ratusan variabel. Pada dasarnya matriks merupakan suatu alat atau instrument yang cukup ampuh untuk memecahkan persoalan tersebut. Matriks akan memudahkan kita untuk membuat analisis-analisis yang mencakup hubungan variabel-variabel dari suatu persoalan. Berikut ini merupakan salah satu contoh persoalan yang dapat diselesaikan dengan matriks.

Kiki ingin membeli bunga untuk hadiah ibunya. Pada penjual I terdapat 5 mawar dan 7 anggrek, penjual II memiliki 4 mawar dan 5 anggrek, sedangkan penjual III memiliki 5 mawar dan 6 anggrek. Susunlah dalam tabel agar mempermudah Kiki dalam menghafal jumlah bunga mawar dan anggrek yang ada.

Alternatif Penyelesaian :

Penjual	Mawar	Anggrek
I	5	7
II	4	5
III	5	6

Dari tabel tersebut, jika angka-angkanya kita ambil dan kita tuliskan dalam kurung buka dan kurung tutup, bentuknya akan menjadi lebih sederhana, dan inilah yang biasa kita sebut dengan ***matriks***.

$$Matriks\ A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

A. Pengertian, Notasi, dan Ordo Matriks

Dari uraian diatas, kita dapat menyimpulkan :

Definisi :

Matriks adalah kumpulan bilangan, simbol, atau ekspresi, berbentuk persegi atau persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom.

Penulisan ***symbol (Notasi) matriks*** menggunakan huruf kapital. Susunan bilangan yang mendatar dalam matriks disebut ***baris,*** sedangkan susunan bilangan yang tegak pada matriks disebut ***kolom*****.**

Secara umum matriks dituliskan :

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa elemen pada matriks A berindeks rangkap, contohnya a_{11}, itu menunjukkan matriks A pada baris ke-1 dan kolom ke-1. Begitu juga dengan elemen matriks A yang berindeks a_{mn}, itu berarti matriks A pada baris ke-m dan kolom ke-n. Lebih jelasnya, perhatikan bentuk umum matriks berikut:

$$A_{mn} = [a_{ij}]_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m = baris

n = kolom

i = 1,2,…, m

j = 1,2,…, i

Ordo matriks merupakan banyaknya baris dan kolom yang menentukan ukuran matriks.

Pemahaman

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -8 & 3 & 0 \\ 9 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kolom Elemen/entri Baris

Elemen matriks A pada baris ke-2 kolom ke-3 = $a_{23} = 7$

Elemen matriks B pada baris ke-3 kolom ke-2 = $a_{32} = 1$

Latihan 1

1. Diketahui sebuah martriks :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 & 4 & -11 \\ 4 & 12 & -6 & 5 & 1 \\ -3 & 6 & 4 & 7 & -2 \\ 20 & 16 & -12 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

   a. Tentukan ordo dari matriks A !
   b. Sebutkan elemen-elemen pada baris ke-2!
   c. Sebutkan elemen-elemen pada kolom ke-5!
   d. Sebutkan elemen a_{32}!
   e. Sebutkan elemen a_{45}!

B. Jenis-Jenis Matriks

ϖ **Jenis-jenis matriks berdasarkan jumlah ordo:**

a. Matriks Baris

Matriks yang hanya memiliki satu baris disebut ***matriks baris.***

Contoh :

$P_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix}$ $\qquad Q_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

b. Matriks Kolom

Matriks yang hanya memiliki satu kolom disebut ***matriks kolom.***

Contoh :

$R_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\qquad S_{31} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

c. Matriks Persegi Panjang

Matriks persegi panjang dibedakan menjadi 2, yakni matriks tegak dan matriks datar.

- **Matriks Tegak**

  Matriks tegak yaitu matriks yang berordo $m \times n$ dengan $m > n$ (matriks yang jumlah barisnya lebih banyak dibandingkan dengan jumlah kolom).

  Contoh :

  $$H_{3X2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

  Matriks H berordo 3×2 yaitu memiliki tiga baris dan dua kolom, sehingga matriks H terlihat tegak.

- **Matriks Datar**

  Berbeda dengan matriks tegak, ***matriks datar*** memiliki ordo mxn dengan $m < n$ (matriks yang jumlah barisnya lebih sedikit dibandingkan dengan jumlah kolom).

  Contoh :

  $$Q_{2X3} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

  Matriks Q berordo 2×3 yaitu memiliki dua baris dan tiga kolom, sehingga matriks Q adalah matriks datar.

d. Matriks Persegi

Matriks persegi yaitu matriks yang memiliki jumlah baris dan kolomnya sama. Misalnya matriks ordo 2×2, matriks ordo 3×3, dan sebagainya.

Matriks persegi memiliki ***diagonal utama*** dan ***diagonal sekunder***. Hasil penjumlahan pada diagonal utama disebut dengan ***Trace.*** Lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh :

Matriks ordo 2x2

$$A_{2X2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Diagonal sekunder *Diagonal utama*

Matriks ordo 3x3

$$B_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Diagonal sekunder *Diagonal utama*

Pada contoh matriks A, yang menjadi diagonal utamanya adalah 2 dan 5 yaitu elemen yang berada pada kiri atas sampai ke kanan bawah. Sebaliknya yang menjadi diagonal sekunder adalah elemen yang terletak dari kanan atas sampai ke kiri bawah yaitu 3 dan 1. Begitu juga dengan matriks B yang berordo 3x3, diagonal utama dari matriks B adalah 1, 7, dan 6. Sedangkan diagonal sekundernya adalah 5, 7, dan 2.

ϖ **Jenis-jenis matriks berdasarkan pola elemen penyusunya:**

a. Matriks Nol (0)

Matriks yang semua elemennya bernilai nol (0) disebut ***matriks nol.***

Contoh :

$$O_{3x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Matriks Diagonal (D)

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang tidak semua elemen yang terletak pada diagonal utama bernilai nol, elemen yang lain bernilai nol.

Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Matriks Identitas (I)

Matriks identitas adalah matriks persegi yang semua elemen yang terletak pada diagonal utama bernilai satu, elemen yang lain bernilai nol.

Contoh :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d. Matriks Segitiga

Matriks segitiga adalah matriks persegi dengan elemen-elemen yang berada dibawah atau diatas diagonal utama semuanya bernilai nol.

Matriks segitiga dibedakan memnjadi dua, yaitu:

- **Matriks Segitiga Atas (U)**

  Matriks segitiga atas yaitu matriks yang elemen-elemen yang berada dibawah diagonal utama bernilai nol.

  Contoh :

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Matriks Segitiga Bawah (L)**

  Matriks segitiga bawah yaitu matriks yang elemen-elemen yang berada diatas diagonal utama bernilai nol.

  Contoh :

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal

Perhatikan tabel berikut.

Nama Siswa	Nilai			
	Matematika	**Bahasa Inggris**	**Bahasa Indonesia**	**Biologi**
Adi	80	80	75	75
Arsel	75	75	80	80
Excel	75	80	80	85
Dafi	80	75	75	85
Amesha	70	80	75	80

a) Buatlah sebuah matriks dari data tersebut.

b) Tentukan banyaknya ordo dari matriks tersebut.

c) Berdasarkan banyaknya ordo, matriks yang telah kalian buat termasuk kedalam jenis matriks apa?

d) Tentukan nilai $a_{21}, a_{13}, dan\ a_{34}$.

Penyelesaian :

a) Dari data yang disediakan oleh tabel, maka kita dapat membentuk sebuah matriks yaitu :

$$A_{5x4} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 75 & 75 \\ 75 & 75 & 80 & 80 \\ 75 & 80 & 80 & 85 \\ 80 & 75 & 75 & 85 \\ 70 & 80 & 75 & 80 \end{bmatrix}$$

b) Matriks A memiliki 5 baris dan 4 kolom, hal ini berarti matriks A memiliki ordo 5x4.

c) Berdasarkan banyaknya ordo, matriks A termasuk kedalam jenis matriks persegi panjang (matriks tegak)

d) a_{21} adalah elemen yang berada pada baris ke-2 dan kolom ke-1 = 75

a_{13} adalah elemen yang berada pada baris ke-1 dan kolom ke-3 = 75

a_{34} adalah elemen yang berada pada baris ke-3 dan kolom ke-4 = 85

Latihan 2

1. Jumlah elemen-elemen pada diagonal utama matriks $A = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 12 & 3 & -2 \\ 6 & 10 & 8 \end{bmatrix}$ adalah…
2. Buatlah matriks identitas yang memiliki ordo 3x3!
3. Diketahui matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & b-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ a+b & 2a+c & 7 \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal. Nilai $a, b, dan\ c$ adalah…

4. Diketahui matriks segitiga atas $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ y+1 & 1 & 2 \\ 0 & x+y & 2 \end{bmatrix}$. Nilai x dan y yang memenuhi adalah…
5. Diketahuin matriks $P = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $Q = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Tentukan jumlah seluruh elemen yang terletak pada diagonal utama dari matriks P dan Q !

C. Transpos Matriks dan Kesamaan Dua Matriks

1. Transpos Matriks

Transpos matriks dapat diperoleh dari penukaran baris dan kolom matriks yakni dengan cara mengubah baris matriks menjadi kolom, dan kolom matriks menjadi baris. Misalkan diketahui matriks B, maka transpos matriks dari matriks B dilambangkan dengan B^T.

Contoh :

$$B_{2x3} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, maka\ B^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Transpos matriks yang memiliki ordo $n \times n$ adalah matriks yang memiliki ordo $n \times n$ pula. Misalkan matriks B memiliki transpose matriks B^T. Jika berlaku B = B^T, maka matriks B dikatan ***Matriks simetris.***

2. Kesamaan Matriks

Dua buah matriks atau lebih dikatakan sama apabila memiliki ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletak juga bernilai sama.

Masalah

Misalkan diketahui matriks sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2^3 \\ 3x2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan matriks diatas, apakah ada matriks yang sama? Apakah ada pula matriks yang berbeda? Sebutkan !

Alternatif penyelesaian :

Perhatikan matriks A dan matriks B. Jika elemen-elemen yang terdapat pada matriks B kita operasikan maka akan diperoleh matriks B yang memiliki elemen nilai yang sama dengan matriks A.

Sehingga : $A = B, A \neq C, dan\ B \neq C.$

Contoh Soal

1. Tentukan transpos dari matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

(baris menjadi kolom, dan kolom menjadi baris)

2. Terdapat dua buah matriks sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 21 & 12 \\ 15 & b^3 & 14 \\ 20 & 25 & 16 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 17 & 3c & 12 \\ 15 & 64 & \frac{28}{a} \\ 20 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Jika matriks A dan B sama, tentukan nilai $a, b, dan\ c$.

Penyelesaian :

Matriks A dan B adalah matriks yang sama, oleh karena itu semua elemen yang seletak (berada pada garis dan kolom yang sama) memiliki nilai yang sama. Maka didapat :

- $\frac{28}{a} = 14$

$28 = 14\,a$

$\frac{28}{14} = a$

$a = 2$

- $b^3 = 64$

$b = \sqrt[3]{64}$

$b = 4$

- $3c = 21$

$c = \frac{21}{3}$

$c = 7$

Latihan 3

1. Tentukan nilai a dan b dari kesamaan matriks berikut :

   a. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \\ a - \frac{15}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - \frac{5}{2} \\ 3a + \frac{7}{2}b \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 14 & 10a - 2b \\ 4a + 6 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ -8 & 28 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 4a & 4 + 2a \\ 2b + 6 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 4b + 2 \\ 2a + 2 & 2a + 2b \end{bmatrix}$

2. Tentukan nilai x, y dan z dari kesamaan matriks berikut :

   a. $\begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 2 - 2y & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2x - 2 \\ 2z & -4 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -y & z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & x - 2 \\ y & 2z \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 2x - 10 \\ 6 - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - 22 \\ 2y + 18 \end{bmatrix}$

3. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4x - 2y & 6x \\ 2x + 4y & 2x + 2y \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 14 & -8 \\ -4y & -1 \end{bmatrix}$. Jika $A = B^T$, maka tentukan nilai dari $x - y$!

D. Operasi Pada Matriks dan Sifat-sifatnya

Gambar 1. Apel dan Jeruk

Alvan dan Roni pergi membeli buah di kios bu Dinda. Alvan membeli 2 kg buah apel dan 1 kg buah jeruk. Sementara Roni membeli 2 kg buah apel dan 2 kg buah jeruk. Harga 1 kg buah apel adalah Rp. 35.000. dan harga 1 kg buah jeruk adalah Rp. 20.000. untuk mengetahui berapa jumlah uang yang harus mereka keluarkan untuk membayar buah-buahan yang telah mereka beli, dapat dicari dengan menggunakan operasi matriks. Mari kita pelajari lebih dalam mengenai materi ini.

1. Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks hanya dapat dilakukan jika keduanya memiliki ordo yang sama. Penjumlahan matriks dapat dilakukan dengan cara menjumlahkan elemen-elemen yang seletak

Contoh :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$. Tentukan $A + B$!

Penyelesaian :

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2 & 3+8 \\ 2+3 & -1+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

a. Sifat komutatif : $A + B = B + A$

b. Sifat Asosiatif : $A + (B + C) = (A + B) + C$

c. Terdapat unsur identitas penjumlahan matriks yaitu matriks O (matriks yang semua elemenya bernilai nol) sedemikian rupa sehingga jika sebuah matriks (misalkan matriks A) dijumlahkan dengan matriks O, maka hasilnya sama dengan matriks A itu sendiri. Sehingga berlaku : $A + O = O + A = A$

d. Untuk setiap matriks A terdapat lawan matriks A yaitu matriks $-A$ (matriks yang semua elemenya bernilai sama dengan matriks A namun berlainan tanda/bernilai negatif) sehingga jika sebuah matriks A dijumlahkan dengan matriks $-A$, maka hasilnya matriks O (matriks yang semua elemenya bernilai nol). Sehingga berlaku :$A + (-A) = (-A) + A = O$.

Matriks $-A$ juga sering disebut sebagai invers penjumlahan atau invers aditif dari matriks A.

Contoh :

Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & -6 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, maka invers aditif dari matriks A adalah $-A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -7 & -3 & 6 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ karena berlaku $A + (-A) = (-A) + A = O$.

e. Transpos jumlah dua matriks sama dengan jumlah transpos kedua matriks yaitu $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Contoh :

Matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Buktikan bahwa $(A + B)^T = A^T + B^T$.

$$\left(\begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 6+2 & 11+1 \\ 5+5 & 6+4 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 6+2 & 5+5 \\ 11+1 & 6+4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$$

2. Pengurangan Matriks

Sama halnya dengan penjumlahan, dua buah matriks atau lebih dapat dikurangkan jika dan hanya jika memiliki ordo yang sama. Pengurangan dapat dilakukan dengan cara mengurangkan elemen-elemen yang seletak.

Contoh :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$. Tentukan $A - B$!

Penyelesaian :

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$.

$$A - B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 - (-6) & 4 - 5 \\ 3 - (-9) & 1 - 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -1 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Skalar dengan Matriks

Perkalian skalar dengan matriks adalah perkalian antara sebuah bilangan dengan sebuah matriks. Bilangan skalar biasanya dilambangkan dengan huruf k. Hasil perkalian antara matriks dengan bilangan skalar adalah sebuah matriks dengan elemen ka_{ij}.

Untuk matriks A dan B yang memiliki ordo sama, serta k_1 dan k_2 adalah anggota bilangan real, maka berlaku sifat-sifat berikut:

a. Sifat distributif : $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

b. Sifat distributif : $k_1(A + B) = k_1A + k_2B$

c. Sifat asosiatif : $k_1(k_2A) = k_1k_2A$

Contoh :

Jika $A = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ tentukan $3A$!

Penyelesaian :

$$3A = 3\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(-5) & 3(6) \\ 3(4) & 3(-2) \\ 3(4) & 3(7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -15 & 18 \\ 12 & -6 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

4. Perkalian Dua Matriks

Dua buah matriks dapat dikalikan jika dan hanya jika jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua.

Misalkan diketahui matriks A_{mxn} dan matriks $B_{nxp.}$ Perkalian matriks A dan B akan menghasilkan matriks baru yang berordo $m \times p$. Jadi ditulis $A_{mxn} \times B_{nxp} = (AB)_{mxp.}$

Contoh :

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Tentukan $A \times B$!

Penyelesaian :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(1) + 4(4) & 3(3) + 4(2) & 3(2) + 4(5) \\ 2(1) + 0(4) & 2(3) + 0(2) & 2(2) + 0(5) \\ 1(1) + 2(4) & 1(3) + 2(2) & 1(2) + 2(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 + 16 & 9 + 8 & 6 + 20 \\ 2 + 0 & 6 + 0 & 4 + 0 \\ 1 + 8 & 3 + 4 & 2 + 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 17 & 26 \\ 2 & 6 & 4 \\ 19 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Misalkan semua hasil kali dan penjumlahan terdefinisi untuk matriks A dan B serta untuk k adalah anggota bilangan real maka pada operasi matriks berlaku sifat-sifat berikut:

a. Sifat tidak komutatif : $AB \neq BA$

b. Sifat asosiatif : $A(BC) = (AB)C$

c. Sifat distributif kiri : $A(B + C) = AB + AC$

$$A(B - C) = AB - BC$$

d. Sifat distributif kanan : $(B + C)A = BA + CA$

$$(B - C)A = BA - CA$$

e. Sifat asosiatif : $k(AB) = A(kB)$

f. Pada matriks persegi terdapat suatu matriks identitas I (matriks persegi yang semua elemen pada diagonal utamanya adalah 1 dan elemen yang lain adalah 0) sedemikian sehingga berlaku $IA = AI = A$

g. Jika $AB = 0$ belum tentu $A = 0$ atau $B = 0$

h. Jika $AB = AC$ belum tentu $B = C$

i. Jika A^T dan B^T berturut-turut adalah transpos dari matriks A dan matriks B, maka berlaku :

$(AB)^T = B^T A^T$.

5. **Perpangkatan Matriks**

Perpangkatan pada matriks hanya dilakukan jika matriks tersebut berbentuk matriks persegi (matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolom). Misalkan matriks A merupakan matriks persegi $m \times m$, maka :

$A^2 = AA$

$A^3 = AA^2$

$A^4 = AA^3$

dst.

Pada matriks A persegi berlaku juga $A^0 = 1$ dan $An = An - 1$, dengan $n > 0$. Jika r dan s adalah bilangan bulat, maka berlaku :

$A^r A^s = A^{(r+s)}$ dan $(A^r)^s = A^{rs}$.

Setelah kita mempelajari operasi pada matriks, coba kalian perhatikan kembali soal cerita yang disajikan diawal pembahasan operasi pada matriks (Gambar 1. Apel dan Jeruk dihalaman 15). dapatkah kalian mengubahnya kedalam bentuk matriks ? serta pelajari cara menyelesaikanya menggunakan operasi pada matriks !

Penyelesaian :

Tabel 1. Jumlah barang

Pembeli	Apel	Jeruk
Alvan	2 kg	1 kg
Roni	2 kg	2 kg

Tabel 2. Harga barang

Barang	Harga
Apel	Rp. 35.000
Jeruk	Rp. 20.000

Dari tabel diatas kita dapat membentuk dua matriks :

Matriks jumlah barang : $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Matriks harga barang : $Q = \begin{bmatrix} 35.000 \\ 20.000 \end{bmatrix}$

Untuk mengetahui jumlah uang yang harus dibayarkan oleh Alvan dan juga Roni untuk membayar buah yang telah dibeli oleh mereka, dapat dilakukan dengan cara mengalikan matriks P dan Q.

$$P.Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 35.000 \\ 20.000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(35.000) + 1(20.000) \\ 2(35.000) + 2(20.000) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 90.000 \\ 110.000 \end{bmatrix}$$

Jadi total uang yang dikeluarkan Alvan sebesar *Rp. 90.000* dan Roni sebesar *Rp. 110.000.* dengan demikian, jumlah seluruh uang yang harus dibayarkan oleh Alvan dan Roni adalah *Rp. 90.000* + *Rp. 110.000* = *Rp. 200.000.*

Latihan 4

1. Tentukan hasil operasi matriks dibawah ini:

   a. $\begin{bmatrix} 3a \\ 2b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4a \\ -5b \end{bmatrix} = \cdots$

   b. $\begin{bmatrix} 4m \\ 2n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \cdots$

   c. $\begin{bmatrix} x & 2y \\ -x & 4y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x & -5y \\ 4x & 4y \end{bmatrix} = \cdots$

   d. $\begin{bmatrix} 2a & 2y \\ -x & 8y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3x & 5y \\ 4x & 4y \end{bmatrix} = \cdots$

2. Diberikan matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Tentukan :

   a. $P + Q$

   b. $Q - R$

   c. $(P + Q) - R$

   d. $P + (Q - R)$

3. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2a & 8 \\ 4b & 6c \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4a-6b & 4a+2 \\ 2a & 2b+14 \end{bmatrix}$. Jika $A = 2B^T$, tentukan nilai $a+b+c$!

4. Hitunglah perkalian matriks berikut:

   a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

5. Diketahui matriks-matriks berikut:

   $P = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$

   Tentukan :

   a. $P.Q$

   b. $Q.P$

   c. $Q.R$

   d. $(P.Q).R$

   e. $P.(P.Q)$

   f. Buat kesimpulan a dan b, serta d dan e.

E. Determinan Matriks

Penting !

Determinan matriks hanya ada pada matriks persegi.

1. Determinan Matriks Ordo 2x2

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, determinan dari matriks A dinotasikan dengan det A atau ditulis :

$$|A| = ad - bc$$

Contoh :

Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan determinan matriks A !

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \text{Det } A &= ad - bc \\ &= (2)(3) - (1)(5) \\ &= 6 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Determinan Matriks Ordo 3x3

- **Metode Sarrus**

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$,

determinan dari matriks A adalah:

$$|A| = \left| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

(-)(-)(-) (+)(+)(+)

$$|A| = (a.e.i + b.f.g + c.d.h) - (c.e.g + a.f.h + b.d.i)$$

Contoh :

Tentukan determinan dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -5 & -7 \end{matrix}$$

$$|A| = ((-2)(3)(8) + (1)(4)(-5) + (-1)(4)(-7))$$
$$-((-1)(3)(-5) + (-2)(4)(-7) + (1)(4)(8))$$
$$= \big((-48) + (-20) + (28)\big) - ((15) + (56) + (32))$$
$$= (-40) - (103)$$
$$= -143$$

- **Metode Minor-Kofaktor**

  Misalkan, A_{ij} merupakan matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke- i dan kolom ke- j.

Minor martiks A_{ij} diberi notasi M_{ij}, dengan $M_{ij} = \det A_{ij}$.

Kofaktor martiks A_{ij} diberi notasi C_{ij}, dengan $C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$.

Sehingga, diperoleh rumus determinan matriks A, yaitu:

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.\, C_{ij}$, untuk sembarang kolom $j (j = 1,2, \dots, n)$

Atau

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \,.\, C_{ij}$, untuk sembarang baris $i (i = 1,2, \dots, n)$

Contoh :

Tentukan determinan dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Berdasarkan rumus metode minor-kofaktor yang telah dibahas sebelumnya, determinan matriks A dapat dicari dengan menghitung jumlah seluruh hasil kali antara kofaktor matriks bagian dari matriks A dengan elemen-elemen pada salah satu baris atau kolom matriks A. Jadi, langkah pertama yang harus kita lakukan adalah dengan memilih salah satu baris atau kolom dari matriks A untuk mendapatkan determinannya. Misal kita pilih baris ke-1. Maka elemen-elemen matriks baris ke-1 yaitu $a_{11,}a_{12,}$ dan $a_{13.}$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{-2 \quad 1 \quad -1} \\ 4 \quad 3 \quad 4 \\ -5 \quad -7 \quad 8 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, rumus determinan matriks yang kita gunakan adalah sebagai berikut:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.\, C_{ij}$$

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Langkah kedua, yaitu kita cari kofaktor matriks bagian dari matriks $A(C_{ij})$. $C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$.

Dan $M_{ij} = \det A_{ij}$. Dengan A_{ij} adalah matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke- j.

Agar lebih jelasnya, perhatikan penjelasan berikut ini.

- A_{11} diperoleh dengan menghilangkkan baris ke-1 dan kolom ke-1

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Maka $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$

- A_{12} diperoleh dengan menghilangkkan baris ke-1 dan kolom ke-2

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

Maka $M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$

- A_{13} diperoleh dengan menghilangkkan baris ke-1 dan kolom ke-3

$$A_{13} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

Maka $M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}$

Sehingga,

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= (-2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(24 + 28) + (-1)(32 + 20) + (-1)(-28 + 15)$$

$$= -143$$

Penting !

Sifat-sifat determinan matriks :

a) Misalkan, A adalah matriks persegi yang berordo $n \times n$ dengan determinan $|A|$ dan B adalah matriks persegi ordo $n \times n$ dengan determinan $|B|$ serta k suatu konstanta.

- $|AB| = |A||B|$.
- $|A^T| = |A|$, (A^T adalah transpos dari matriks A).
- $|kA| = k^n|A|$, dengan $n =$ ordo matriks A.
- $|A^{-1}| = \frac{1}{ad-bc}$, ($A^{-1}$ merupakan invers dari matriks A).

b) Jika semua elemen pada matriks A sama dengan 0, maka $|A| = 0$.

c) Jika semua elemen pada salah satu baris atau kolom matriks A sama dengan elemen pada baris atau kolom yang lain, maka $|A| = 0$

d) Jika semua elemen pada salah satu baris atau kolom matriks A merupakan kelipatan dari elemen pada baris atau kolom yang lain, maka $|A| = 0$.

Latihan 5

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} y+3 & 9 \\ 5 & 2y \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 3y & 13 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, jika Det A = Det B. Tentukanlah nilai y!
2. Tentukan nilai p dari matriks berikut.
   a. $\begin{bmatrix} p-1 & 3 \\ p & p \end{bmatrix} = 5$
   b. $\begin{bmatrix} p+3 & 3p \\ 5 & 5p \end{bmatrix} = 18$
3. Jika diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ tentukan :
   a. $A.B$
   b. $B.A$
   c. Buatlah kesimpulan dari hasil tersebut

F. Invers Matriks

1. Invers Matriks Ordo 2x2

Invers dari matriks A dinyatakan dengan notasi :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Jika $ad - bc = 0$, maka matriks tidak memiliki invers disebut ***matriks singular.***
- Jika $ad - bc \neq 0$, maka matriks memiliki invers dan disebut ***matriks non singular.***

Contoh :

Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan invers dari matriks A !

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \text{Det } A &= ad - bc \\ &= (2)(3) - (1)(5) \\ &= 6 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Invers Matriks Ordo 3x3

- **Metode Adjoin**

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ merupakan matriks ordo 3x3.

Adjoin matriks A dinotasikan dengan :

$$\boxed{adj(A) = (kof(A))^T}$$

Invers matriks A dapat diperoleh dengan :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} adj(A) = \frac{1}{\det A} adj(A)}$$

Contoh :

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ adj(A)$$

Sesuai dengan rumus yang telah diberikan sebelumnya, maka kita membutuhkan determinan serta adjoin dari matriks A.

Langkah I : Mari kita cari determinan dari matriks A terlebih dahulu menggunakan salah satu metode yang sudah dijelaskan pada pembahasan sebelumnya. Misalnya kita gunakan metode sarrus untuk memperoleh determinan matriks A, sehingga :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= ((1)(8)(6) + (2)(5)(3) + (1)(2)(7)) \\ &\quad -\big((1)(8)(3) + (1)(5)(7) + (2)(2)(6)\big) \\ &= (48 + 30 + 14) - (24 + 35 + 24) \\ &= 92 - 83 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Langkah II : Mentukan adjoin dari matriks A yaitu dengan mencari kofaktor dari matriks A.

$$kof\ (A) = ((-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$kof\ (A) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{21} & M_{22} & M_{32} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 3 & -10 \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu,

$$adj(A) = (kof(A))^T = \begin{bmatrix} 13 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -10 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, adj(A)$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 13 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -10 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{13}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{3}{9} & -\frac{3}{9} \\ -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{13}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

- **Metode Transformasi Baris Elementer**

  Untuk dapat menentukan invers matriks menggunakan metode tranformasi baris elementer kalian dapat memperhatikan langkah-langkah berikut ini:

  a) Bentuk matriks $(A_n|I_n)$, dengan I_n adalah matriks identitas berordo n.

  b) Transformasikan matriks $(A_n|I_n)$, ke dalam bentuk $(I_n|B_n)$ menggunakan transformasi baris. Transformasi baris elemen dapat dilakukan dengan cara:

- Menukar suatu baris dengan baris lain
- Menjumlahkan atau mengurangkan suatu baris dengan baris lain
- Menjumlahkan atau mengurangkan suatu baris dengan k kali baris lain
- Mengalikan atau membagi suatu baris dengan bilangan skalar $k(k \neq 0)$

c) Berdasarkan hasil pada langkah b, diperoleh invers matriks A_n adalah B_n.

Catatan :

Terdapat beberapa notasi yang sering digunakan dalam transformasi baris elementer, diantaranya:

- $B_i \leftrightarrow B_j =$ menukar elemen-elemen baris ke-i dengan elemen-elemen baris ke-j dan sebaliknya.
- $kB_i =$ elemen-elemen baris ke-i dengan skalar $k(k \neq 0)$.
- $B_i + kB_j =$ menjulah atau mengurangkan elemen-elemen baris ke-i dengan k kali elemen-elemen baris ke-j.

Agar lebih jelasnya, perhatikah contoh berikut.

Contoh :

Tentukan invers matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian :

Langkah I : Mari kita bentuk matriks A menjadi matriks $(A_n|I_n)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Langkah II : Transformasikan matriks $(A_n|I_n)$ menjadi matriks $(I_3|A_3)$. Kita dapat menggunakan beberapa cara seperti yang terdapat pada poin a-c yang telah dijelaskan sebelumnya.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{B_2 - 2B_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{B_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{B_2 - 3B_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{B_3 - 4B_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 10 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{9}B_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right) \xrightarrow{B_2 - 3B_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right) \xrightarrow{B_1 - B_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{19}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right) \xrightarrow{B_1 - 2B_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right)$$

Jadi,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Latihan 6

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, dan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan :

   a. A^{-1}

   b. B^{-1}

   c. $A^{-1}.\, B^{-1}$

   d. $B^{-1}.\, A^{-1}$

   e. $(AB)^{-1}$

   f. $(BA)^{-1}$

   g. Buatlah kesimpulan dari hasil tersebut.

2. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, Tentukan :

   a. A^{-1}

   b. $A^{-1}.\, A$

   c. $A.\, A^{-1}$

   d. Buatlah kesimpulan dari hasil tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Ilhamsyah, Helmi, Fransiskus Fran. *Determinan dan Invers Matriks*. Buletin Ilmiah Math Stat dan Terapannya (Bimaster) 06, No. 3 (2017):193-202.

Kemendikbud RI. *Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2013 Edisi Revisi*. Jakarta: Kementrian Pendidikan Dan Kebudayaan. 2014.

Slamet Waluyo, H Sunardi, Dkk. *Buku Matematika IPS*. Jakarta: Bumi Aksara. 2005.

Wilson Simangunsong. *Buku Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga. 2005.

Zaini. *Model Penyelesaian Matriks dengan Metode Eliminasi Gauss Melalui Matrix Laboratory (MATLAB)*. Jurnal Sains Terapan 03, No. 1 (2017):15-20.

BIOGRAFI PENULIS

Penulis bernama Ekky May Asih lahir di OKU Timur pada tanggal 04 Mei 1999. Anak pertama dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Bapak Mulyoto dan Ibu Siti Fatimah. Jenjang Pendidikan penulis dimulai dari TK Dharma Wanita Patok Songo Kecamatan Buay Madang Kabupaten OKU Timur yang selesai pada tahun 2006, dilanjutkan di SD Negeri 01 Patok Songo Kecamatan Buay Madang Kabupaten OKU Timur yang selesai pada tahun 2011, kemudian dilanjutkan di SMP NU Tebat Jaya Kecamatan Buay Madang Kabupaten OKU Timur yang selesai pada tahun 2014, selanjutnya melanjutkan di SMA Negeri 01 Buay Madang Kabupaten OKU Timur yang selesai pada tahun 2017, kemudian penulis melanjutkan pendidikan tingkat perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung Fakultas Tarbiyah dan Keguruan program studi Pendidikan Matematika.

KEMENTRIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI RADEN INTAN LAMPUNG
PUSAT PERPUSTAKAAN
Jl. Letkol H. Endro Suratmin, Sukarame I, Bandar Lampung 35131
Telp.(0721) 780887-74531 Fax. 780422 Website: www.radenintan.ac.id

SURAT KETERANGAN
Nomor: B-0203 /Un.16 / P1 /KT/V/ 2023

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Dr. Ahmad Zarkasi, M.Sos. I
NIP : 197308291998031003
Jabatan : Kepala Pusat Perpustakaan UIN Raden Intan Lampung

Menerangkan Bahwa Skripsi Dengan Judul :

MATRIKS UNTUK SMA/ MA/ SMK/ MAK
Karya :

NAMA	NPM	FAK/PRODI
EKKY MAY ASIH	1711050156	FTK/ P MTK

Bebas plagiasi dengan hasil pemeriksaan di **Fakultas/ Prodi** dengan tingkat kemiripan sebesar 10% dan dinyatakan *Lulus* dengan bukti terlampir dan dinyatakan ***Lulus*** dengan bukti terlampir.

Demikian Keterangan ini kami buat, untuk dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Bandar Lampung, 22 Mei 2023
Kepala Pusat Perpustakaan

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA PUSAT PERPUSTAKAAN UIN RADEN INTAN LAMPUNG

Dr. Ahmad Zarkasi, M.Sos. I
NIP.197308291998031003

Ket:
1. Surat Keterangan Cek Turnitin ini Legal & Sah, dengan Stempel Asli Pusat Perpustakaan.
2. Surat Keterangan ini Dapat Digunakan Untuk Repository
3. Lampirkan Surat Keterangan Lulus Turnitin & Rincian Hasil Cek Turnitin ini di Bagian Lampiran Skripsi Untuk Salah Satu Syarat Penyebaran di Pusat Perpustakaan.

Buku Ekky Mai

ORIGINALITY REPORT

10%	11%	4%	1%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	repository.radenintan.ac.id Internet Source	2%
2	fr.scribd.com Internet Source	1%
3	sifafitriaaini.blogspot.com Internet Source	1%
4	anyflip.com Internet Source	1%
5	repository.uin-suska.ac.id Internet Source	1%
6	eprints.unpam.ac.id Internet Source	1%
7	uasuan.blogspot.com Internet Source	1%
8	es.slideshare.net Internet Source	1%
9	www.scribd.com Internet Source	1%
10	files1.simpkb.id Internet Source	1%
11	repository.upstegal.ac.id Internet Source	1%

Exclude quotes On
Exclude bibliography On
Exclude matches < 1%