MATERI AJAR MATEMATIKA

MATRIKS

Pengertian Matriks | Jenis-Jenis Matriks | Transpose Matriks | Kesamaan Dua Matriks | Operasi Matriks | Determinan Matriks | Invers Matriks | Transfomasi Matriks Pada Geometri

SMA / SMK / MA

KELAS XI

Riska Restiana

Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd

Riyama Ambarwati, M.Si

MATRIKS

A. Pengertian Matriks

Matriks merupakan susunan kumpulan bilangan atau fungsi yang diatur dalam baris dan kolom berbentuk persegi panjang. Matriks dicirikan dengan elemen-elemen penyusun yang diapit oleh tanda kurung siku [ ] atau tanda kurung biasa ( ).

Matriks dilambangkan dengan huruf besar sedangkan elemen dilambangkan dengan huruf kecil. Ukuran sebuah matriks dinyatakan dalam satuan *ordo*. *Ordo* yaitu banyaknya baris × kolom dalam matriks tersebut (tanda × memiliki makna sebagai tanda pemisahan bukan bermakna perkalian). Ordo merupakan karakteristik suatu matriks yang menjadi patokan dalam operasi-operasi antar matriks. Matriks pada umumnya disimbolkan seperti berikut ini:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{1\times 1} & a_{1\times 2} & a_{1\times n} \\ a_{2\times 2} & a_{2\times 2} & a_{2\times n} \\ a_{m\times 1} & a_{m\times 2} & a_{m\times n} \end{bmatrix} \rightarrow \text{BARIS}$$

$$\downarrow$$

KOLOM

Banyaknya baris pada matriks A adalah m, sedangkan banyaknya kolom pada matriks A adalah n, bilangan-bilangan real $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{mn}$ adalah elemen-elemen matriks A, dengan a_{mn} adalah elemen pada baris ke-m kolom ke-n. Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom maka matriks A berordo $m \times n$, yang disimbolkan dengan $A_{m\times n}$.

Salah satu bentuk penyajian yang disediakan adalah penyusun soal berupa baris dan kolom, yang biasanya ditulis dalam bentuk tabel. Hubungannya dengan Al-Qur'an dapat dilihat pada ayat berikut:

Allah SWT berfirman dalam surat Ash-Shaff ayat 4 sebagai berikut:

إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلَّذِينَ يُقَٰتِلُونَ فِي سَبِيلِهِۦ صَفّٗا كَأَنَّهُم بُنۡيَٰنٞ
مَّرۡصُوصٞ ٤

Artinya:

”*Sesungguhnya Allah menyukai orang yang berperang dijalan-Nya dalam barisan yang teratur seakan-akan mereka seperti suatu bangunan yang tersusun kokoh*”. (QS. Ash-Shaff : 4)”

B. Jenis-Jenis Matriks

1. Matriks Baris

   Matriks baris merupakan matriks yang terdiri atas satu baris saja. Pada umumnya matriks baris berordo $1 \times n$, dengan n adalah banyak kolom pada matriks. Contoh:

   $$A = [2 \quad 5 \quad 8]$$

2. Matriks Kolom

   Matriks kolom merupakan matriks yang terdiri atas satu kolom saja. Pada umumnya matriks kolom berorodo $m \times 1$, dengan m adalah banyak kolom pada matriks. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Persegi Panjang

   Matriks persegi panjang merupakan matriks yang jumlah barisnya tidak sama dengan jumlah kolomnya. Matriks persegi panjang memiliki ordo $m \ \times n$. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Persegi (Bujur Sangkar)

   Matriks persegi atau juga dikenal dengan istilah matriks bujur sangkar merupakan matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya. Sehingga ordo dari matriks persegi adalah $n \ \times \ n$. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Segitiga

   Matriks segitiga merupakan matriks yang memiliiki elemen nol dengan pola segitiga disalah satu bagian atas atau bawah, dengan diagonal utama tidak termasuk pola segitiga tersebut. Matriks segitiga atas adalah matriks dengan semua elemen di bawah diagonal utama bernilai nol, sedangkan

Matriks segitiga bawah adalah matriks dengan semua elemen di atas diagonal utama bernilai nol. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Atas Matriks Segitiga Bawah

6. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan mariks yang semua elemennya bernilai nol, kecuali elemen pada diagonal utama matriks. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Matriks Identitas (Satuan)

Matriks identitas atau dikenal juga dengan istilah matriks satuan merupakan matriks dengan diagonal utama yang memiliki elemen bernilai 1. Matriks ini dilambangkan dengan I_n, dinama n adalah ordo dari matriks tersebut. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Matriks Nol

Matriks nol merupakan matriks yang semua elemennya bernilai nol. Matriks ini dilambangkan dengan $0_{n \times m}$. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Matriks Skalar

Matriks skalar merupakan matriks yang semua elemen diagonal utamanya bernilai tidak nol dan bernilai sama. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

C. Transpose Matriks

Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka transpose dari A dinotasikan sebagai A^T yaitu suatu matriks $n \times m$ yang dihasilkan dari saling menukarkan antara baris dan kolom matriks A. Dalam hal ini kolom pertama dari matriks A^T adalah baris pertama dari matriks A, kolom kedua matriks A^T adalah baris kedua matriks A dan seterusnya. Bentuk matriks ini sering juga dikenal dengan istilah matriks simetri. Contoh:

$$A_{3\times1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad {A^T}_{1\times3} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

D. Kesamaan Dua Matriks

Dua buah matriks A dan B dikatakan sama (ditulis $A = B$), jika dan hanya jika kedua matriks itu mempunyai ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletaknya sama, karena menggunakan "jika dan hanya jika" maka pengertian ini berlaku menurut dua arah, yaitu:

a. Jika $A = B$ maka haruslah ordo kedua matriks itu sama, dan elemen-elemen yang seletak sama.

b. Jika dua buah matriks mempunyai ordo yang sama, elemen-elemen yang seletak juga sama maka $A = B$.

Contoh Soal 1

$$x = \begin{bmatrix} a & 22 & 5 \\ 9 & 7 & b \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } l = \begin{bmatrix} 6 & 22 & 5 \\ 9 & 7 & 3a \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $x = l$, tentukan nilai b?

Pembahasam:

Karena $x = l$ maka $a = 6$ dan $b = 3a$

Maka nilai $b = 3 \times 6$

$= 18$

E. Operasi Matriks

1. Penjumlahahn matriks

وَلَبِثُوا۟ فِى كَهْفِهِمْ ثَلَٰثَ مِا۟ئَةٍ سِنِينَ وَٱزْدَادُوا۟ تِسْعًا

Artinya:

"*Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi)*". (Q.S. Al-Kahfi : 25)

Jika A dan B dua buah matriks berordo sama maka jumlah matriks A dan B ditulis $A + B$ adalah sebuah matriks baru C yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen matriks A dengan elemen-elemen matriks B yang seletak.

Pada penjumlahan berlaku sifat-sifat:

a. Sifat Komutatif, $A + B = B + A$
b. Sifat Asosiatif, $(A + B) + C = A + (B + C)$
c. Sifat Lawan/negatif, $A + (-A) = 0$
d. Sifat Identitas , $A + O = O + A = A$
e. Sifat Transpose, $(A + B)^T = A^T + B^T$

Contoh Soal 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; dan \; B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Pembahasan:

$$C = A + B$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Pengurangan Matriks

وَلَقَدۡ اَرۡسَلۡنَا نُوۡحًا اِلٰى قَوۡمِهٖ فَلَبِثَ فِيۡهِمۡ اَ لۡفَ سَنَةٍ اِلَّا خَمۡسِيۡنَ عَامًا ؕ فَاَخَذَهُمُ الطُّوۡفَانُ وَهُمۡ ظٰلِمُوۡنَ

Artinya:

"*Dan sesungguhnya Kami telah mengutus Nuh kepada kaumnya, maka ia tinggal di antara mereka seribu tahun kurang lima puluh tahun. Maka mereka ditimpa banjir* *besar, dan mereka adalah orang-orang yang zalim*". *(Q.S. Al-'Ankabuut : 14)*

Pengurangan matriks A dengan matriks B adalah suatu matriks yang elemen-elemennya diperoleh dengan cara mengurangkan elemen matriks A dengan elemen matriks B yang bersesuaian (seletak), atau dapat pula diartikan sebagai penjumlahkan matriks A dengan lawan negatif dari B, dituliskan: $A - B = A + (-B)$

Seperti halnya pada penjumlahan dua buah matriks, pengurangan dua buah matriks pun terdefinisi apabila ordo kedua matriks tersebut sama.

Contoh Soal 3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; dan \; B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$C = A - B$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks

ٱلزَّانِيَةُ وَٱلزَّانِى فَٱجْلِدُوا۟ كُلَّ وَٰحِدٍ مِّنْهُمَا مِا۟ئَةَ جَلْدَةٍ ۖ وَلَا تَأْخُذْكُم بِهِمَا رَأْفَةٌ فِى دِينِ ٱللَّهِ إِن كُنتُمْ تُؤْمِنُونَ بِٱللَّهِ وَٱلْيَوْمِ ٱلْءَاخِرِ ۖ وَلْيَشْهَدْ عَذَابَهُمَا طَآئِفَةٌ مِّنَ ٱلْمُؤْمِنِينَ

Artinya :

"*Perempuan yang berzina dan laki-laki yang berzina, maka deralah tiap-tiap seorang dari keduanya seratus kali dera, dan janganlah belas kasihan kepada keduanya mencegah kamu untuk (menjalankan) agama Allah, jika kamu beriman kepada Allah, dan hari akhirat, dan hendaklah (pelaksanaan) hukuman mereka disaksikan oleh sekumpulan orang-orang yang beriman*". (Q.S. An-Nuur : 2)

مَثَلُ الَّذِيْنَ يُنْفِقُوْنَ اَمْوَالَهُمْ فِيْ سَبِيْلِ اللّٰهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ اَنْۢبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِيْ كُلِّ سُنْۢبُلَةٍ مِّائَةُ حَبَّةٍ ۗ وَاللّٰهُ يُضٰعِفُ لِمَنْ يَّشَاۤءُ ۗ وَاللّٰهُ وَاسِعٌ عَلِيْمٌ

Artinya :

"*Orang yang menginfakkan hartanya di jalan Allah seperti sebutir biji yang menumbuhkan tujuh tangkai, pada setiap tangkai ada seratus biji. Allah melipatgandakan bagi siapa yang Dia kehendaki, dan Allah Mahaluas, Maha Mengetahui*". (Q.S. Al-Baqarah :261)

Perkalian matriks adalah nilai pada matriks yang bisa dihasilkan dengan cara dikalikan-nya tiap baris dengan setiap kolom yang memiliki jumlah baris yang sama. Setiap anggota matriks ini nantinya akan dikalikan dengan anggota elemen matriks lainnya.

a. Perkalian Matriks Dengan Bilangan Bulat

Sifat-sifat dari perkalian dengan skalar.

a. Sifat distribusi terhadao skalar r

$$r(A+B) = rA + rB$$

b. Sifat distribusi terhadap skalar r dan s

$$(r+s)A = rA + sA$$

c. Sifat asosiatif terhadap perkalian skalar

$$(rs)A = r(sA)$$

d. Sifat perkalian dengan skalar 1

$$1 \times A = A$$

Contoh Soal 4

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai $2A$?

Pembahasan:

$$\begin{aligned} 2A &= 2\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\times 4 & 2\times 3 & 2\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 5 & 2\times 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 10 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b. Perkalian Dua Matriks

Perkalian dua matriks ini bisa dilakukan ketika jumlah kolom A dan jumlah baris B sama. Perkalian matriks tersebut akan menghasilkan suatu matriks dengan jumlah baris yang sama antara matriks A dan B.

$$A_{a\times c}.B_{c\times n} = C_{a\times d}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} am + ao & an + bp \\ cm + do & cn + dp \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat dari perkalian.

a. Sifat asosiatif

$$(AB)C = A(BC)$$

b. Sifat matriks satuan, identitas perkalian

$$AI = IA = A$$

c. Sifat matriks nol

$$AO = OA = O$$

Contoh Soal 5

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan $A \times B$?

Pembahasan:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 & 1 \times 9 + 2 \times 0 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 & 3 \times 9 + 4 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 22 & 9 \\ 43 & 50 & 27 \end{bmatrix}$$

4. Pemangkatan Matriks

Pemangkatan matriks hanya berlaku pada matriks persegi. Misalkan matrik A adalah matriks persegi $n \times n$ maka $A^2 = AA, A^3 = AA^2, A^4 = AA^3$ dan seterusnya. Persegi A matriks persegi berlaku pula $A^0 = I$ dan $A^n = A.A^{n-1}$, dengan $n > 0$. Jika r dan s adalah bilangan bulat berlaku $A^r . A^s = A^{(r+s)}$ dan $(A^r)^s = A^{rs}$.

F. Determinan Matriks

Untuk setiap matriks persegi terdapat suatu bilangan tertentu yang disebut determinan. Determinan matriks adalah jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari A dan dinyatakan dengan $det\, A$ yang diartikan dengan sebuah hasil perkalian elementer bertanda dari suatu matriks A adalah sebuah hasil perkalian elementer pada suatu kolom dengan $+1$ atau -1. Untuk lebih jelasnya, berikut ini diuraikan cara mencari determinan matriks berordo 2×2 dan matriks berordo 3×3.

1) Determinan matriks berordo 2×2

Jika Matriks A $= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka

$$det\ A = |A|$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= \text{ad} - \text{bc}$$

Contoh Soal 6

Nilai determinan dari P $= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ adalah?

Pembahasan:

$$|P| = (8 \times 4) - (4 \times 3)$$

$$|P| = 32 - 12$$

$$|P| = 20$$

2) Determinan matriks berordo 3×3

Untuk mencari determinan matriks berordo $\mathbf{3 \times 3}$ dapat digunakan dua metode, sebagai berikut:

a. Metode Sarrus

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ q & w & x \end{bmatrix}$ Maka

$$Det\ A = |A| = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ q & w & x \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{matrix} p & q & r \\ s & t & u \\ q & w & x \end{matrix}\right] \begin{matrix} p & q \\ s & t \\ v & w \end{matrix}$$

$$= \mathrm{ptx} + \mathrm{quv} + \mathrm{rsw} - \mathrm{rtv} - \mathrm{qsx} - \mathrm{puw}$$

Sebagai ketentuan di atas perlu di perhatikan bahwa tidak berlaku bahwa matriks 4×4 dan yang lebih tinggi lagi.

Contoh Soal 7

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan determinan A?

Pembahasan:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka determinan A adalah:

(-) (-) (-)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix}$$

(+) (+) (+)

$$= (2.2.3) + (1.1.5) + (4.4.1) - (4.2.5) - (2.1.1) - (1.4.3)$$

$$= 12 + 5 + 16 - 40 - 2 - 12$$

$$= -21$$

b. Metode Kofaktor

Terlebih dahulu siswa dijelaskan tentang sub matriks atau minor dari suatu matriks. Minor suatu matriks A dilambangkan dengan M_{ij} adalah matriks bagian dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke-i dan elemen-elemen pada kolom. Contoh: Q = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, untuk mendapatkan $det\ (Q)$ dengan metode kofaktor adalah mencari terlebih dahulu determin-determin minornya yang di peroleh dari exspansi baris ke-1 diatas, yaitu $det\ (Q_{11}) = -13$, $det\ (Q_{21}) = -12$. $det\ (Q_{31}) = 2$. Maka kofaktor matriks Q adalah: Q = $\begin{bmatrix} -13 & 26 & -13 \\ 12 & -24 & 12 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

c. Jenis matriks berdasarkan nilai determinan

Jika $|A| = 0$, maka matriks A disebut matriks singular. Jika $|A| \neq 0$, maka matriks A di sebut bukan / Matriks non singular.

a. Sifat-sifat determinan matriks

$|A^T| = |A|$

$|A^{-1}| = \left|\frac{1}{A}\right|$

$|AB| = |A| . |B|$

$|A^n| \quad = |A|$

b. Menentukan minor elemen matriks

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (5 \times 2) - (4 \times 1) = 10 - 4 = 6$$

c.. Kofaktor (A)

Kof (A) = $\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$

Kof (A) = $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -7 \\ 4 & -7 & 8 \\ -11 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

d. Adjoin Matriks

Adj (A) = (kof A^T)

Kof (A) = $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -7 \\ 4 & -7 & 8 \\ -11 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

setelah itu dikonspaktor transport dari baris jadi kolom

(kof A^T) $= \begin{pmatrix} 6 & 4 & -11 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

G. Invers Matriks

Invers matriks adalah misal A dan B dua matriks persegi dengan ordo yang sama. Matriks A dan B di katakan saling invers jika memenuhi $AB = BA^{-1}$ maka matriks inversnya: A^{-1}. Suatu matriks dapat dibalik jika dan hanya jika matriks tersebut adalah matriks persegi (matriks yang berukuran $n \times n$) dan matriks tersebut non-singular (determinan 0). Tidak semua matriks memiliki invers. Invers matriks dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi:

Jika A adalah suatu matriks kuadrat, dan jika kita dapat mencari matriks B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers dari A.

Matriks-matriks persegi A dan B sedemikian hingga $AB = BA = I$ maka A disebut invers B ditulis B^{-1} dan sebaliknya B adalah invers A ditulis A^{-1} sehingga berlaku AA^{-1} = A^{-1}A = I, dimana I matriks identitas.

Invers matriks A dirumuskan $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$ Adj(A)

أَلَمْ نَجْعَلِ الْأَرْضَ كِفَاتًا (٢٥)أَحْيَاءً وَأَمْوَاتًا (٢٦)

Artinya: "*Bukankah Kami menjadikan bumi (tempat) berkumpul, orang-orang hidup dan orang-orang mati*?"(Q.S. Al-Mursalat : 25-26)

Invers matriks berordo 2 $\times$ 2

Jika A $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Dengan syarat $det\ (A) \neq 0$, apabila $det\ (A) = 0$ maka matrik A merupakan matriks singular yang artinya tidak memiliki invers.

Contoh Soal 7

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan A^{-1}!

Pembahasan :

det(A) = (5 x 2) – (3 x 3) = 1

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat:

a. $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

b. $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Invers Matriks (3×3)

Mencari invers matriks berordo 3×3 dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan adjoin dan transformasi baris elementer

- Invers matriks ordo $\mathbf{3 \times 3}$ dengan adjoin

  Rumus:

  $$\boxed{\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, adj(A)}} \quad \boldsymbol{dengan\ adj(A) = \left(kof(A)\right)^{T}}$$

  Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut:

Contoh Soal 8

Tentukan invers matriks berikut dengan menggunakan adjoin?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Pembahasan:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ adj(A)$$

Mencari determinan bisa dengan metode sehingga:

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right.$$

$$\det A = 1 \cdot 8 \cdot 6 + 2 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 \cdot 1 - 1 \cdot 7 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 6$$

$$= 48 + 14 + 30 - 24 - 35 - 24 = 9$$

Kemudian, kita tentukan adjoin matriks dengan mencari kofaktor matriks A tersebut.

$$kof(A) = ((-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$kof(A) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$kof(A) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -10 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Oleh karena,

$$adj(A) = \left(kof(A)\right)^T = \begin{bmatrix} 13 & 3 & -10 \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 13 & 3 & -10 \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{10}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

- Invers matriks ordo **3 × 3** dengan transformasi baris elementer.

  Untuk menentukan invers matriks menggunakan transformasi baris elementer, kamu dapat mengikuti langkah-langkah berikut ini:

1. Bentuk matriks $(A_n|I_n)$, dengan I_n merupakan matriks identitas berordo n.
2. Transformasikan matriks $(A_n|I_n)$, kebentuk $(I_n|B_n)$ menggunakan transformasi baris, transformasi baris elementer dapat dilakukan dengan cara:
   a) Menukar suatu baris dengan baris lain.
   b) Menjumlah atau mengurangkan suatu baris dengan baris lain.
   c) Menjumlahkan atau mengurangkan suatu baris dengan k kali baris lain.
   d) Mengalikan atau membagi suatu baris dengan bilangan skalar $k(k = 0)$
3. Berdasarkan hasil pada langkah 2, diperoleh invers matriks A_n dan B_n.

   Catatan:

   Ada beberapa notasi yang sering digunakan dalam transformasi baris elementer, diantaranya:
   a) $B_i \leftrightarrow B_j$ = menukar elemen elemen baris ke-i dengan elemen elemen baris ke-j dan sebaliknya.
   b) kB_i = elemen elemen baris ke-i dengan skalar k $(k \neq 0)$.
   c) $B_i + kB_j$ = menjumlahkan atau mengurangkan elemen elemen baris ke-i dengan k kali elemen elemen garis ke-j.

Contoh Soal 9

Tentukan invers matriks A dengan transformasi baris elementer?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Pembahasan:

Pertama-tama, kita bentuk matriks A menjadi matriks $(A_3|I_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Lalu, kita transformasikan matriks $(A_3|I_3)$ ke bentuk$(I_3|A_3)$. Kita bisa menggunakan beberapa cara seperti yang dijelaskan poin a-d pada langkah ke-2 rumus di atas.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\boxed{1}}{\xrightarrow{B_2-2B_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\boxed{2}}{\xrightarrow{B_3-2B_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\boxed{3}}{\xrightarrow{B_3+B_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\boxed{4}}{\xrightarrow{\frac{1}{5}B_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \overset{\boxed{5}}{\xrightarrow{B_2-2B_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{\boxed{6}}{\xrightarrow{B_1-B_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Keterangan:

1) $B_2 - 2B_1$ = elemen-elemen baris ke-2 dikurang 2 kali elemen-elemen baris ke-1.
2) $B_3 - 2B_1$ = elemen-elemen baris ke-3 dikurang 2 kali elemen-elemen barike-1.
3) $B_3 + B_2$ = elemen-elemen baris ke-3 ditambah elemen-elemen baris ke-2.
4) $\frac{1}{5}B_3$ = elemen-elemen baris ke-3 dikali dengan $\frac{1}{5}$.
5) $B_2 - 2B_3$ = elemen-elemen baris ke-2 dikurang 2 kali elemen-elemen baris ke-3.
6) $B_1 - B_2$ = elemen-elemen baris ke-1 dikurang elemen-elemen baris ke-2.

Sehingga, diperoleh invers matriks A, yaitu:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

H. Transfomasi Matriks Pada Geometri

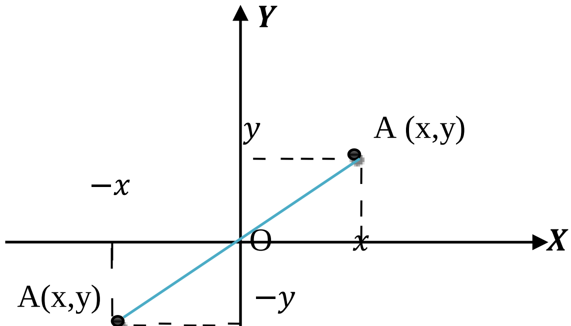
Transformasi geometri merupakan perubahan suatu bidang geometri yang meliputi posisi, besar dan bentuknya sendiri. Jika hasil transformasi kongruen dengan bangunan yang ditranformasikan, maka disebut transformasi isometri. Transformasi isometri sendiri memiliki dua jenisya itu transformasi isometri langsung dan transformasi isometri berhadapan. Transformasi isometri langsung termasuk translasi dan rotasi, sedangkan transformasi isometri berhadapan termasuk refleksi.

Secara umum, transformasi geometri dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ yang memetakan titik (x,y) ke titik (x’,y’) dengan persamaan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

A. Matriks Refleksi (Pencerminan)

Misalkan peta titik A(x,y) oleh pencerminan terhadap pusat O adalah $A'(x', y')$. Perhatikan gambar berikut:



Berdasarkan gambar diatas, koordinat $A'(x', y')$ dapat kita tulis dalam persamaan:

$$x' = -x \;\leftrightarrow\; x' = (-1)x + (0)y$$

$$y' = -y \;\leftrightarrow\; y' = (0)x + (-1)y$$

Dalam persamaan matriks kita tulis

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap pusat O adalah

$$M_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama seperti diatas, akan diperoleh matriks-matriks pencerminan lainnya sebagai berikut:

Matriks pencerminan terhadap sumbu x

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks pencerminan terhadap sumbu y

$$M_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks pencerminan terhadap garis y = x

$$M_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks pencerminan terhadap garis y = -x

$$M_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Q.S An-Nur : 26) / Refleksi atau Pencerminan

اَلْخَبِيْثٰتُ لِلْخَبِيْثِيْنَ وَالْخَبِيْثُوْنَ لِلْخَبِيْثٰتِۚ وَالطَّيِّبٰتُ لِلطَّيِّبِيْنَ وَالطَّيِّبُوْنَ لِلطَّيِّبٰتِۚ اُولٰۤىِٕكَ مُبَرَّءُوْنَ مِمَّا يَقُوْلُوْنَۗ لَهُمْ مَّغْفِرَةٌ وَّرِزْقٌ كَرِيْمٌ □

Artinya:

"*Perempuan-perempuan yang keji untuk laki-laki yang keji, dan laki-laki yang keji untuk perempuan-perempuan yang keji (pula), sedangkan perempuan-perempuan yang baik untuk laki-laki yang baik dan laki-laki yang baik untuk perempuan-perempuan yang baik (pula). Mereka itu bersih dari apa yang dituduhkan orang. Mereka memperoleh ampunan dan rezeki yang mulia (surga)*". (Q.S An-Nur : 26)

Contoh Soal 10

Peta titik A(2,3) oleh pencerminan terhadap garis y = x adalah….

Pembahasan :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, peta titik A adalah A'(3,2)

Contoh Soal 11

Bayangan titik P jika dicerminkan terhadap sumbu x adalah (4,-2). Koordinat titik P adalah…..

Pembahasan:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks diatas kita peroleh:

$$4 = x \quad \rightarrow \quad x = 4$$

$$-2 = -y \quad \rightarrow \quad y = 2$$

Jadi, koordinat titik P adalah (4,2)

Contoh Soal 12

Bayangan garis $2x + y - 3 = 0$ jika dicerminkan terhadap pusat O adalah…..

Jawab:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks diatas diperoleh:

$$x' = -x \;\leftrightarrow\; x = -x'$$

$$y' = -y \;\leftrightarrow\; y = -y'$$

Subsitusikan $x = -x'$ dan $y = -y'$ ke garis $2x + y - 3 = 0$

$2(-x') + (-y') - 3 = 0$

$-2x' - y' - 3 = 0$

$2x' + y' + 3 = 0$

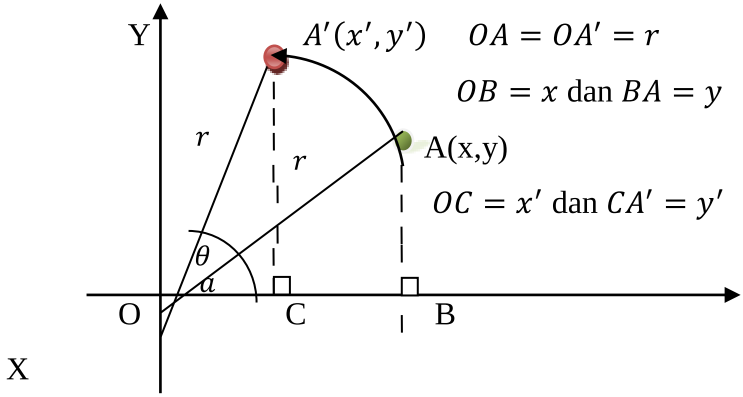
Jadi, bayangannya adalah $2x' + y' + 3 = 0$

Berdasarkan penjelasan di atas berikut tabel refleksi berserta matrisnya:

No	Refleksi	Bayangan	Matriks
1	Sumbu x	$(x, -y)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
2	Sumbu y	$(-x, y)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3	Garis $y = x$	(y, x)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4	Garis $y = -x$	$(-y, -x)$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
5	Titik O(0,0)	$(-x, -y)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

B. Matriks Rotasi (Perputaran)

Misalkan peta titik A(x,y) oleh rotasi dengan pusat O sejauh θ adalah $A'(x',y')$. Perhatikan gambar berikut:



Dari segitiga siku-siku OBA diperoleh

$$\boldsymbol{x = r\cos a}$$

$$\boldsymbol{y = r\sin a}$$

Dari segitiga siku-siku OCA' diperoleh

$x' = r\cos\ (a+\theta)$

$= r\ (\cos a\cos\theta - \sin a\sin\theta)$

$= r\cos a\cos\theta - r\sin a\sin\theta$

$= x\cos\theta - y\sin\theta$

$y' = r\sin\ (a+\theta)$

$= r\ (\sin a\cos\theta + \cos a\sin\theta)$

$= r\sin a\cos\theta + r\cos a\sin\theta$

$= y\cos\theta + x\sin\theta$

$= x\sin\theta + y\cos\theta$

Diperoleh

$x' = x\cos\theta \ - y\sin\theta$

$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

Dalam Persamaan matriks kita tulis

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Jadi, matriks yang bersesuaian dengan rotasi terhadap pusat O sebesar θ adalah: $M_{[O,\theta]} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Contoh Soal 13

Titik A(-4,3) dipetakan oleh rotasi dengan pusat O sejauh 90° searah jarum jam. Peta titik A adalah….

Pembahasan:

Searah jarum jam berarti $\theta = -90°$

Ingat :

$\mathbf{sin}(-\boldsymbol{\theta}) \ = -\boldsymbol{sin\ \theta}$

$\mathbf{cos}(-\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\ (-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin\ (-90) & \cos(-90) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jadi, peta titik A adalah $A'(3,4)$

Contoh Soal 14

Bayangan garis $y = 2x + 1$ oleh rotasi dengan pusat O sebesar 180° adalah…..

Pembahasan:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

Dari Persamaan matriks diatas diperoleh

$x' = -x \ \leftrightarrow \ x = -x'$

$y' = -y \ \leftrightarrow \ y = -y'$

Subsitusi $x = -x'$ dan $y = -y'$ ke garis $y = 2x + 1$

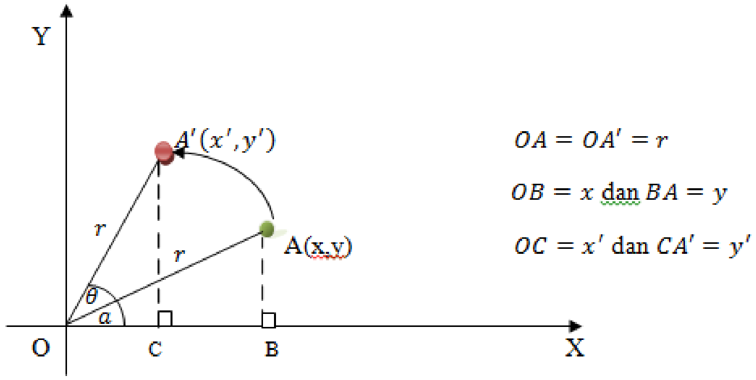
$-y' = 2(-x') + 1$

$-y' = -2x' + 1$

$y' = 2x' - 1$

Jadi, bayangannya adalah $y = 2x - 1$

Misalkan peta titik A(x,y) oleh rotasi dengan pusat P(a,b) sejauh θ adalah $A'(x', y')$. Perhatikan gambar berikut :



Dari segitiga siku-siku PBA diperoleh

$\boldsymbol{x - a = r\ cos\ a}$

$\boldsymbol{y - b = r \sin a}$

Dari segitiga siku-siku PCA' diperoleh

$$x' - \mathrm{a} = \mathrm{r} \cos(\alpha + \theta)$$
$$= r\,(\cos\ a \cos\theta - \sin a \sin\theta)$$
$$= r \cos a \cos\theta - \ r \sin a \sin\theta$$
$$= (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta$$

$$y' - b = r \sin(a + \theta)$$
$$= r(\sin a \cos\theta + cos\ a \sin\theta)$$
$$= r \sin a \cos\theta + r \cos a \sin\theta$$
$$= (y - b)\cos\theta + (x - a)\sin\theta$$
$$= (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta$$

Diperoleh

$x' - \mathrm{a} = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta$

$y' - b = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta$

Dalam persamaan matriks kita tulis

$$\begin{bmatrix} x' - \mathrm{a} \\ y' - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \mathrm{a} \\ y - b \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 15

Persamaan bayangan parabola $y = x^2 + 2x + 1$ jika dirotasi dengan pusat P(2,-3) sejauh $270°$ adalah…..

Pembahsan :

$$\begin{bmatrix} x' - 2 \\ y' + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 270° & -\sin 270° \\ \sin 270° & \cos 270° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 2 \\ y + 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' - 2 \\ y' + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 2 \\ y + 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' - 2 \\ y' + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + 3 \\ -x + 2 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks diatas diperoleh

$x' - 2 = \mathrm{y} + 3 \quad \rightarrow \quad \mathrm{y} = \mathrm{x}' - 5$

$y' + 3 = -x + 2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{x} = -\mathrm{y}' - 1$

Subsitusi x dan y ke parabola $y = x^2 + 2x + 1$

$\mathrm{x}' - 5 = (-\mathrm{y}' - 1)^2 + 2(-\mathrm{y}' - 1) + 1$

$\mathrm{x}' - 5 = (\mathrm{y}')^2 + 2\mathrm{y}' + 1 - 2\mathrm{y}' - 2 + 1$

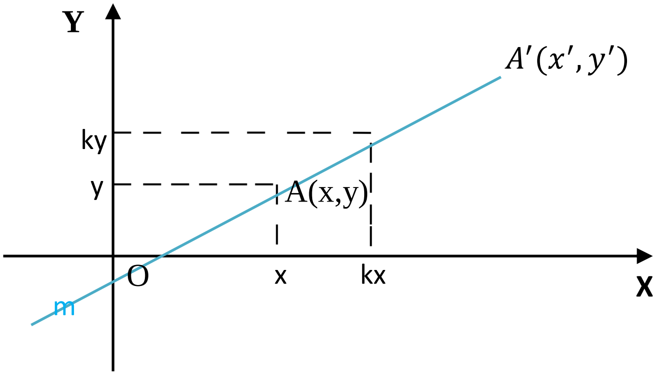
$\mathrm{x}' - 5 = (\mathrm{y}')^2$

$(y')^2 \ = x' - 5$

Jadi persamaan bayangannya adalah $y^2 = x - 5$

C. Matriks Dilatasi (Perkalian)

Misalkan peta titik A(x,y) oleh dilatasi dengan pusat O dan faktor skala k adalah $A'(x', y')$. Perhatikan gambar berikut :



Sebagai catatan, titik $A'(x', y')$ dapat berada disepanjang garis m, tergantung nilai k.

Berdasarkan gambar diatas, koordinat $A'(x', y')$ dapat ditulis dalam persamaan:

$$x' = kx \quad \leftrightarrow \quad x' = kx + 0y$$

$$y' = ky \quad \leftrightarrow \quad y' = 0x + ky$$

Dalam persamaan matriks ditulis

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Dengan matriks dilatasinya

$$[M_{[O.k]}] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Untuk pusat (a,b), persamaan matriksnya adalah

$$\begin{bmatrix} x' - \mathrm{a} \\ y' - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \mathrm{a} \\ y - b \end{bmatrix}$$

(Q.S An-Nissa : 31) / Dilatasi

اِنْ تَجْتَنِبُوْا كَبَاۤىِٕرَ مَا تُنْهَوْنَ عَنْهُ نُكَفِّرْ عَنْكُمْ سَيِّاٰتِكُمْ وَنُدْخِلْكُمْ مُّدْخَلًا كَرِيْمًاا

Artinya:

"*Jika kamu menjauhi dosa-dosa besar di antara dosa-dosa yang dilarang mengerjakannya, niscaya Kami hapus kesalahan-kesalahanmu dan akan Kami masukkan kamu ke tempat yang mulia (surga)*". (Q.S An-Nissa : 31).

Contoh Soal 16

Persamaan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 = 5$ oleh dilatasi dengan pusat O dan faktor skala 2 adalah….

Pembahasan:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks diatas diperoleh

$x' = 2x \quad \rightarrow x = \frac{1}{2}\, x'$

$y' = 2y \quad \rightarrow x = \frac{1}{2}\, y'$

Subsitusi x dan y ke persamaan $x^2 + y^2 = 5$

$$\left(\frac{1}{2}\,x'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,y'\right)^2 = 5$$

$$\frac{1}{4}(x')^2 + \frac{1}{4}(y')^2 = 5 \text{ (kali 4)}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = 20$$

Jadi, bayangannya adalah $x^2 + y^2 = 20$

Contoh Soal 17

Peta titik R(1,3) oleh dilatasi dengan pusat (-2,4) dan factor skala -2 adalah……

Pembahasan :

Titik R : (x,y) =(1,3)

Pusat dilatasi : (a,b) = (-2,4)

Faktor skala k : k = -2

Peta titik R : $(x', y') = ?$

Persamaan matriksnya

$$\begin{bmatrix} x' - \mathrm{a} \\ y' - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \mathrm{a} \\ y - b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' + 2 \\ y' - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 2 \\ 3 - 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' + 2 \\ y' - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' + 2 \\ y' - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks diatas diperoleh

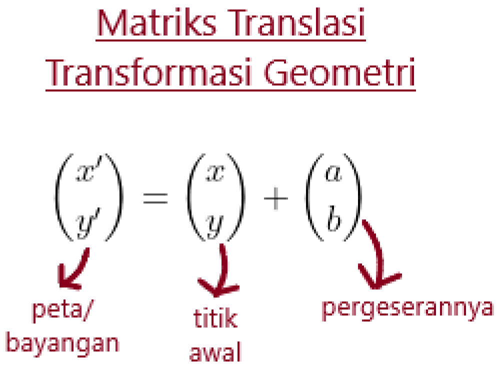
$x' + 2 = -6 \quad \rightarrow \; \mathrm{x}' = -8$

$y' - 4 = 2 \qquad \rightarrow \; \mathrm{x}' = 6$

Jadi, peta titik R adalah $R'(-8{,}6)$

C. Matriks Translasi (Pergeseran)

Translasi atau pergeseran merupakan perpindahan suatu titik sepanjang garis lurus. Jadi, si titik itu hanya digeser atau dipindah tanpa diputar atau mengubah ukurannya. bentuknya akan seperti berikut ini:



——————— Contoh Soal 18 ———————

Titik $\mathrm{A}(3, 2)$ digeser sejauh $\mathrm{T}(4, 3)$. Tentukan A'!

Pembahasan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Jadi, translasi titik $A(3, 2)$ adalah $A'(7, 6)$

Contoh Soal 19

Titik A(1,3) ditransformasikan terhadap matriks $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Tentukan koordinat hasil transformasi titik tersebut!

Pembahasan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat hasil transformasi titik A adalah $A'(1,9)$

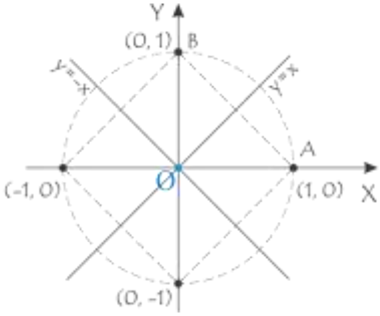
Cara lain menemukan matriks transformasi

Jika titik $A(1,0)$ dan $B(0,1)$ kita tuliskan sebagai matriks kolom, akan kita peroleh matriks identitas, yaitu :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Titik A dan B ini dapat kita gunakan untuk menemukan matriks yang bersesuaian dengan transformasi tertentu, seperti pencerminan ataupun perputaran.

Perhatikan gambar berikut :



Bayangan titik A dan B oleh pencerminan terhadap pusat O adalah $A'(-1, 0)$ dan $B'(0, -1)$. Jika bayangannya ini kita susun menjadi matriks kolom, akan diperoleh matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap pusat O, yaitu:

$$M_O \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Bayangan titik A dan B oleh pencerminan terhadap sumbu x adalah $A'(1,0)$ dan B'(0, -1).

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Bayangan titik A dan B oleh rotasi dengan pusat O sejauh 90° adalah $A'(0,1)$ dan $B'(-1,0)$.

$$M_{(O,90°)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks-mariks transformasi lainnya dapat kita peroleh dengan cara yang sama, yaitu transformasikan titik A dan B, kemudian nyatakan bayangannya sebagai matriks kolom.

Matriks yang bersesuaian dengan dua transformasi berurutan

Misalkan $M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah matriks yang bersesuaian dengan transformasi T_1 dan $M_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah matriks yang bersesuaian dengan transformasi T_2. Jika $A'(x',y')$ adalah hasil pemetaan titik $A(x,y)$ oleh transformasi T_1 dan dilanjutkan transformasi T_2 , ditulis:

$T_1 \, o \, T_2$, maka peta titik A dapat dinyatakan dalam persamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dengan matriks transformasinya $M_{[T_1 \, o \, T_2]} = \begin{bmatrix} c & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Catatan : Urutan perkalian matriksnya harus diperhatikan, karena pada perkalian matriks tidak berlaku sifat komutatif.

Contoh Soal 20

1. Diketahui T_1 adalah transformasi pencerminan terhadap sumbu x dan T_2 adalah transformasi rotasi dengan pusat O sejauh $90°$. Tentukan bayangan titik $A(2, 5)$ oleh transformasi!

   a. $T_2 \, o \, T_1$

   b. $T_1 \, o \, T_2$

   Pembahasan:

   $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   a. $T_2 \, o \, T_1$ (T_1 dilanjutkan T_2)

   $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A oleh trasformasi T_2 o T_1 adalah A'(5, 2).

b. $T_1 \; o \; T_2$ (T_2 dilanjutkan T_1)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A oleh trasformasi $T_1 \; o \; T_2$ adalah $A'(-5, -2)$.

2. Persamaan bayangan garis $x + y = 1$ oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ dilanjutkan dilatasi dengan pusat O dan faktor skala 4 adalah ...
Pembahasan :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Jika diagonal matriks transformasinya tidak nol seperti kasus diatas, akan lebih mudah menggunakan sifat invers matriks dalam menentukan x dan y.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}x' \\ -\frac{1}{8}x' + \frac{1}{4}y' \end{bmatrix}$$

dari persamaan matriks diatas kita peroleh

$x = \frac{1}{4}x'$

$y = -\frac{1}{8}x' + \frac{1}{4}y'$

Substitusi x dan y ke garis $x + y = 1$

$\frac{1}{4}x' + (-\frac{1}{8})x' + \frac{1}{4}y' = 1 \parallel \times 4$

$x' - \frac{1}{2}x' + y' = 4$

$\frac{1}{2}x' + y' = 4$

Jadi, bayangannya adalah $\frac{1}{2}x + y = 4$

SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2a & 4 & 6 \\ 8 & 10 & b \\ 4c & 5 & 12 \end{bmatrix}$ dan

   $B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 4a \\ b & 5 & 12 \end{bmatrix}$, Jika $A = B$, nilai c adalah…

   Penyelesaian:
   Matriks A dan B adalah sama karena kedua matriks tersebut berordo sama dan elemen-elemen yang seletak sama, maka:

   $$A = B \to \begin{bmatrix} 2a & 4 & 6 \\ 8 & 10 & b \\ 4c & 5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 4a \\ b & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

   - $2a = 8$
     $a = 4$
   - $b = 4a$
     $b = 4 \times 4$
     $b = 16$
   - $4c = b$
     $4c = 16$
     $c = \frac{16}{4}$
     $c = 4$

   Jadi nilai c adalah 4

2. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, dan

   $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Matriks $(A + 2B) - (2B + 2C)$ adalah…

Penyelesaian:

$(A + 2B) - (2B + 2C) = A + 2B - 2B - 2C$

$(A + 2B) - (2B + 2C) = A - 2C$

$A - 2C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$A - 2C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

$A - 2C = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

3. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ invers matriks dan determinan matrik tersebut adalah…

   Penyelesaian:

   $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

   $A^{-1} = \dfrac{1}{(-8)(5) - (6)(7)}\begin{bmatrix} 5 & -(-6) \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$

   $A^{-1} = \dfrac{1}{-40 + 42}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$

   $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$

   $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{-7}{2} & -4 \end{bmatrix}$

5. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 5 & a \\ 3b & 5c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2a + 2 & a + 8 \\ a + 4 & 3a - b \end{bmatrix}$.

   Jika $2A = B^T$, nilai c yang memenuhi adalah…

   Penyelesaian:

   - Transpose matriks B

$$B = \begin{bmatrix} 2a+2 & a+8 \\ a+4 & 3a-b \end{bmatrix} \to B^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2a+2 & a+4 \\ a+8 & 3a-b \end{bmatrix}$$

- $2A = B^T$

  $2\begin{bmatrix} 5 & a \\ 3b & 5c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2 & a+4 \\ a+8 & 3a-b \end{bmatrix}$

  $\begin{bmatrix} 10 & 2a \\ 6b & 10c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2 & a+4 \\ a+8 & 3a-b \end{bmatrix}$

Dari persamaan matriks diatas dapat diperoleh nilai a

$$10 = 2a + 2$$
$$2a = 10 - 2$$
$$a = 4$$

Nilai b

$$6b = a + 8$$
$$6b = a + 8$$
$$b = \frac{12}{6} = 2$$

Substitusikan nilai a dan b pada persamaan baris ke-2 dan kolom ke-2 pada persamaan matriks di atas:

$$10c = 3a - b$$
$$10c = 3(4) - 2$$
$$10c = 10$$
$$c = \frac{10}{10} = 1$$

Jadi nilai c adalah 1.

6. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2x & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & x \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2y & 26 \\ -2x & -6 \end{bmatrix}$, jika $AB = C$, determinan dari matriks C invers adalah...

   Peyelesaian:
   Perkalian matriks:

$$AB = C$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 26 \\ -2x & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x(4) + 3(2) & 2x(5) + 3x \\ -2(4) + 2(2) & -2(5) + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 26 \\ -2x & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8x + 6 & 13x \\ -4 & -10 + 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 26 \\ -2x & -6 \end{bmatrix}$$

   Mencari nilai x

$$13x = 26$$
$$x = \frac{26}{13}$$
$$x = 2$$

   Substitusikan nilai x ke persamaan yang memiliki variabel y

$$8x + 6 = 2y$$
$$8(2) + 6 = 2y$$
$$2y = 16 + 6$$
$$y = \frac{22}{2}$$
$$y = 11$$
$$3x^2 - y = 3(2)^2 - 11$$
$$= 3(4) - 11$$
$$= 12 - 11$$

   Jadi, penyelesaian $3x^2 - y$ adalah 1.

7. Nilai P yang memenuhi persamaan matriks

$$2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 2p \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ adalah…}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 2p \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2 & 2-4 \\ 0+2 & 1+4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2+2p \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2 + 2p = -2$$
$$2p = -4$$
$$p = -2$$

Jadi nilai P yang memenuhi persamaan matriks adalah -2.

8. Matriks x yang memenuhi : $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ x = $\begin{bmatrix} 7 & 18 \\ -6 & 21 \end{bmatrix}$ adalah…

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \text{x} = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ -6 & 21 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{(4.5)-(-3.-1)}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 18 \\ -6 & 21 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{20-3}\begin{bmatrix} 35-18 & 90+63 \\ 7-24 & 18+84 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 17 & 153 \\ -17 & 102 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

9. Diketahui persamaan matriks $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Nilai $x - y$ adalah…

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 - 2x & (-5 - 2x - 2y) \\ 18 - 4x & (-9 - 4x - 4y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan di atas diperoleh

- $10 - 2x = 1 \rightarrow x = \ 92$
- $-5 - 2x - 2y = 0$

Untuk $x = \frac{9}{2} \rightarrow -5 - 2\left(\frac{9}{2}\right) - 2y = 0$

$\rightarrow \quad -5 - 9 - 2y = 0$

$y = -7$

Jadi $x - y = \frac{9}{2} - \frac{14}{2} = \frac{23}{2}$

10. Jika A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ dan det (AB) = 12 maka nilai x adalah…

Penyelesaian:

$$Det(AB) = 12$$
$$|AB| = 12$$
$$|A||B| = 12$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12$$
$$(2x - 0)(-2 - 0) = 12$$
$$-4x = 12$$
$$x = -3$$

11. Diketahui matriks A =$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ invers matriks AB adalah $(AB)^{-1}$….

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{(-2)(-1) - (-1)(-4)}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

12. Diketahui jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Tentukan hasil penjumlahan matriks $A + B$?

Penyelesaian:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+2 \\ 2+4 & 4+5 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

13. Diketahui jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 7 \\ -8 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ Tentukan hasil pengurangan dari matriks $A - B$?

Penyelesaian:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 7 \\ -8 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 - \frac{1}{6} & -1 - 7 \\ 6 - (-8) & -\frac{1}{5} - (-\frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & -8 \\ 14 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

14. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$,

$dan\ C \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Tentukan hasil dari matriks $A - (B + C)$?

Penyelesaian:

$$B + C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B + C = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A - (B + C) = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 11 & 11 - 9 \\ 7 - 8 & 9 - 6 \end{bmatrix}$$

$$A - (B + C) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

15. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tentukan hasil dari matrik $A \times B$?

Penyelesaian:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 3 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 \\ 3 \times 2 + 4 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 + 3 \\ 2 + 2 \\ 6 + 4 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

16. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $K = -2$, maka $K \times A$?

Penyelesaian:

$$K \times A = -2 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$K \times A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

17. Tentukan determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$\det A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= (4 \times (-3) - ((-2) \times 8)$$

$$= -12 - (-16)$$

$$= 4$$

18. Tentukan determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$?

Penyelesaian:

$$detA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{matrix}$$

$$detA = (2 \times 2 \times 0) + ((-1) \times (-1) \times (-3)) + (3 \times 5 \times 4) - \big(3 \times 2 \times (-3)\big) - (2 \times (-1) \times 4) - ((-1) \times 5 \times 0)$$

$$detA = 0 + (-3) + 60 - (-18) - (-8) - 0$$

$$detA = 67$$

19. Tentukan invers matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$?

Penyelesaian:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \times\ adj\ A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(2\times7-3\times5)} \times \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14-15} \times \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -1 \times \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

20. Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$?

Penyelesaian:

$$A\,dj\,A = \begin{bmatrix} +\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & +\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} & +\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ +\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & +\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 9 & -9 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 9 & -4 \\ 1 & -9 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$detA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$detA = (2.2.3) + (3.4.3) + (5.1.2) - (5.2.3) - (2.4.2) - (3.1.3)$$

$$detA = 12 + 36 + 10 - 30 - 16 - 9$$

$$= 3$$

Sehingga:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \times\ adj\ A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} -2 & 9 & -4 \\ 1 & -9 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{9}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{9}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

21. Peta titik A = (3,4) oleh pencerminan terhadap sumbu y = - x adalah…

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Jadi bayangannya $A' = (-4, -3)$

22. Diketahui matriks A= $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$B= $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Apabila $B - A = C'$ dan C’= transpose matriks C, maka nilai x × y adalah…

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+y-2 & 3 \\ 2 & y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan di atas diperoleh:

- $y - 4 = 1 \rightarrow y = 5$
- $x + y - 2 = 7$
- $x + 5 - 2 = 7 \rightarrow x = 4$

Jadi $x \times y = (4) \times (5) = 20$

23. Jika matriks $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $dan\ N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ maka matriks 2MN - NM adalah…

Penyelesaian:

$$2MN - NM = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

24. Diberikan 2 matriks A dan B sebagai berikut A= $\begin{bmatrix} 5 & k \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, B $= \begin{bmatrix} 9 & m \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Jika AB=BA, maka $\frac{k}{m}$ adalah…

Penyelesaian:

$$AB = BA$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 5 & k \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & m \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & m \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & k \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 45 & 5m + 5k \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 9k + 2m \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan diatas diperoleh

$5m + 5k = 9k + 2m$

$3\,m = 4\,k$

$\frac{k}{m} = \frac{3}{4}$

25. Jika A = $\begin{bmatrix} 2x+1 & x-1 \\ 3 & x \end{bmatrix}$, maka jumlah semua nilai x sehingga det A = 27 adalah…

Penyelesaian:

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & x+1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 27$$

$$x(2x+1) - 3(x-1) = 27$$

$$2x^2 + x - 3x + 3 = 27$$

$$2x^2 - 2x - 24 = 0 \rightarrow dibagi\ 2$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4) - (x+3) = 0$$

Jadi nilai x di atas adalah 4 dan -3.

DAFTAR PUSTAKA

Astuti A.Y, Miyanto, dan Noviana E.S. 2019. *Matematika untuk kelas XI SMA/MA Semester 1*. Yogyakarta: Intan Pariwara.

BBM, T. 2015. *Big Book Matematika SMA Kelas 1, 2 dan 3*. Jakarta: Penerbit Cmedia Imprint Kawan Pustaka.

Herryanto,ddk. 2009. *Matematika kelas XII*. Jakarta: Yudhistira

Kompas, I. T. 2021. *Grand Master UTBK SAINTEK 2021*. Jakarta Pusat: PT kompas ilmu.

Lansaroni, Noti.2015. *Pintar Matematika Tanpa Bimbel SMA X,XI,XII*. Yogyakarta. PT Bentang Pustaka.

Mauludin, Ujang. 2005.*Matematika Program Ilmu Alam untuk SMA atau MA XII*.Bandung: PT Sarana Panca Karya Nusa.

Munir,Rinaldi. 2010. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung

Ngapiningsih, Miyanto, dan Noviana Endah Santoso. 2019. *Matematika untuk Kelas XI SMA/MA*. Yogyakarta: Intan Pariwara.

Pesta dan Cecep Anwar. 2008. *Matematika Aplikasi Untuk SMA dan MA Kelas XII Program Studi Ilmu Alam*. Jakarta. Pusat Pembukuan Depatemen Pendidikan Nasional.

rg, dale, dkk. 2006. Calculus Edition. Amerika Serikat : Prentice Hall

Simangunson, W. 2008. Matematika Dasar *(Rev. ed)*. Jakarta Timur: Erlangga.

Sukino. 2020. *Penuntun penyelesaian Matematika Wajib*. Bandung: Yrama Widya.

Sudianto Andri Kristianto, Lasker Pangaparan Sinaga Manullang, Sudianto Tri Andre Hutapea. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK kelas XI*. Jakarta : Kementerian Pendidikan Dan Kebudayaan Republik Indonesia

Tim Kreatif CCM. *Cara Cepat Menguasai Matematika SMA/MA*. Jakarta : PT Bumi Aksara.

Wirodikromo, S. dan Darmanto, M. 2019. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Kelompok Wajib 2.* Jakarta:Erlangga

Ammariah, Hani. (2021).*"Cara Mencari Determinan Dan Invers Matriks"*, https://www.ruangguru.com/blog/cara-mencari-determinan-dan-invers-matriks, diakses pada 18 Febuari 2022 pukul 19.32.

Maker, Zero. (2017).*"Matriks Transformasi Geometri"*,https://smatika.blogspot.com/2017/11/matriks-transformasi-geometri.html?m=1, diakses pada 17 Febuari 2022 pukul 10.07.

Opan.definisi dan jenis matriks (http://uhyan.com/definisi-dan-jenis-matriks.php) .Diakses tanggal 09 April 2021

Rumus invers matriks 3x3 (https://www.quipper.com/id/blog/mapel/matematika/invers-matriks-kelas-12/). Diakses tangga 09 April 2021

MATERI AJAR MATEMATIKA MATRIKS

Penulis dilahirkan di Jawa Tengah pada tanggal 07 Maret 1998. Penulis yang akrab dengan nama panggilan "Riska" ini memiliki nama lengkap Riska Restiana, yang merupakan anak pertama dari bapak Priyo Karyanto dan ibu Satini.

Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu di TK Adz-Dzikri Bandar Lampung, SD Negeri 2 Way Dadi Bandar lampung, SMP N 19 Bandar Lampung, dan SMA AL-AZHAR 3 Bandar Lampung. Setelah lulus dari SMA AL-AZHAR 3 Bandar Lampung pada tahun 2016, di tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan di Perguruan Tinggi UIN Raden Intan Lampung Fakultas Tarbiyah dan Keguruan tepatnya pada Program Studi Pendidikan Matematika.

Buku ini dibuat dengan penuh ketekunan, dan motivasi untuk terus belajar dan berusaha serta sebagai bentuk partisipasi dalam meningkatkan mutu pendidikan. Semoga buku ini dapat bermanfaat dan memberikan kontribusi positif.