TRIGONOMETRI

Novita Radesa Dewi

Rizki Wahyu Yunian Putra M.Pd

Abi Fadila, M.Pd

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi robbil ‘alamin. Segala puji bagi Allah SWT yang telah menganugrahkan begitu banyak nikmat kepada hambanya. Sehingga sejak dari awal buku ini ditulis Allah SWT masih memberikan nikmat yang luar biasa bagi penulis sampai terbentuknya buku ini yang mudah – mudahan dapat memberi banyak manfaat bagi para pembaca dan calon – calon generasi penerus bangsa.

Buku ini dihimpun dan diurai sesuai dengan pengalaman penulis selama menempuh pendidikan formal maupun non formal. Buku ini juga disusun dengan tujuan agar dapat mempermudah pemahaman bagi para pembaca terutama pada materi trigonometri. dimana menurut pengalaman penulis pribadi, trigonometri merupakan salah satu materi matematika yang paling susah untuk difahami baik ditingkat sekolah menengah bahkan dalam lungkungan perkuliahan sekalipun.

Tentu saja penulis mengakui masih banyak kekurangan dan kesalahan pada penulisan buku ini, baik dari sisi materi, cara penyajian maupun penulisannya. Oleh karena itu, sudilah kiranya bagi para pembaca, terutama kepada guru penulis pribadi untuk memberikan saran dan masukan demi kesempurnaan buku ini.

Bandar Lampung,   Juli 2022

Penulis

DAFTAR ISI

PEMBELAJARAN

TRIGONOMETRI

Sumber : *https://www.belajarsampaimati.com/2014/08/berapa-jarak-planet-planet-dari-matahari.html*

Trigonometri merupakan ilmu pengukuran yang berkaitan dengan sudut dan segitiga. Salah satu kegunaan trigonometri terdapat dalam bidang astronomi seperti pada Gambar 3.1. Tahukah Anda bagaimana cara ilmuwan menentukan jarak antara dua planet di luar angkasa? Untuk menentukan jarak dua planet di luar angkasa, ilmuwan membuat pemodelan berupa suatu segitiga dan ukuran sudutnya. Kemudian, menggunakan trigonometri untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Itulah salah satu kegunaan trigonometri dalam bidang astronomi. Dalam kehidupan sehari-hari,trigonometri digunakan untuk menentukan panjang atau tinggi suatu benda. Agar Anda dapat menerapkan trigonometri, pelajari materi dalam bab ini dengan baik.

A. Sejarah Trigonometri

Trigonometri ini dilakukan pelacakan terhadap historisnya mengalami perkembangan pada lebih dari tiga ribu tahun yang lalu, dimana awalnya dirintis oleh matematikawan asal India, Lagadha. Beliau saat itu melakukan perhtungan mengenai peubah aljabar yang akan diaplikasikan pada perhitungan astronomi dan trigonometri.

Awal kemuculan trigonometri juga ditelusuri bersamaan pada kehadiran sosok matematikawan Yunani, bernama Hipparchus di sekitar 150 sebelum masehi dengan tabel trigonometrinya yang aplikasinya pada segitiga. Selain itu, sekitar tahun 100, Ptolemy, juga melakukan perkembangan terkait bagaimana menghitung trigonometri lanjutan, dan pada tahun 1595, karya yang memiliki pengaruh dalam tigonometri diterbitkan dan diperkenalkan ke dalam bahasa Inggris dan Perancis oleh Silesia Bartholemaeus Pitiskus.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, ada banyak aplikasi trigonometri. Terutama adalah teknik triangulasi yang digunakan dalam astronomi untuk menghitung jarak ke bintang-bintang terdekat, dalam geografi untuk menghitung antara titik tertentu, dan salam sistem navigasi satelit.

B. Definisi Trigonometri

Asal kata trigonometri yaitu trigonon dan metro dalam bahasa Yunani yang masing-masing berarti tiga sudut dan mengukur, sehingga trigonometri merupakan suatu cabang ilmu matematika yang berkaitan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometri, sebagai contoh tangen, cosinus, dan sinus. Sedangkan definisi dari trigonometri menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) adalah ilmu ukur mengenai sudut dan sepadan dengan segitiga. Seperti yang tercantum dalam Q.S. Yunus ayat 5.

هُوَ الَّذِيْ جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاۤءً وَّالْقَمَرَ نُوْرًا وَّقَدَّرَهٗ
مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوْا عَدَدَ السِّنِيْنَ وَالْحِسَابَۗ مَا خَلَقَ اللّٰهُ ذٰلِكَ
اِلَّا بِالْحَقِّۗ يُفَصِّلُ الْاٰيٰتِ لِقَوْمٍ يَّعْلَمُوْنَ

Artinya : “ Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya, dan Dialah yang menentapkan tempat-tempat orbitnya, agar kamu mengetahui bilangan tahun, dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan demikian itu melainkan dengan benar. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui.” (Q.S. Yunus :5)

Melalui Q.S. Yunus ayat 5, kita tahu bahwa supaya manusia di muka bumi ini tahu terkait perhitungan waktu, oleh Allah SWT diciptakanlah matahari dan bulan sehingga, masalah awal bulan, awal tahun, penentuan sholat, dan arah kiblat secara akurat dan tepat sangatlah memerlukan bantuan matematika khususnya trigonometri.

Ilmu ukur mengenai segitiga merupakan istilah trigonometri yang sering diartikan oleh banyak orang. Akan tetapi, masih belum tahu segitiga yang dimaksud apakah jenisnya sama sisi, sembarang, sama kaki, ataupun siku-siku. Dijelaskan bahwa, yang sering diaplikasikan khususnya pada perbandingan trigonometri biasanya adalah memakai segitiga siku-siku atau sama kaki. Trigonometri sangat erat kaitannya dengan geometri, baik ruang maupun bidang.

Pada bangun yang khususnya bentuk segitiga, ilmu trigonometri merupakan suatu metode dalam perhitungan untuk memperoleh solusi terkait perbandingan pada bangun geometri. Geometri secara prinsipnya, merupakan satu diantara ilmu yang berkaitan dengan besar sudut, dimana kegunaannya yaitu dalam perhitungan ketinggian suatu tempat tanpa mengukur secara langsung sehingga sifatnya lebih praktis dan efesien.

Kesimpulan dari definisi di atas bahwa trigonometri adalah cabang dari ilmu matematika yang mengkaji masalah sudut, terutama sudut segitiga yang masih ada hubungannya dengan geometri. Sedangkan dalam aplikasinya, trigonometri dapat diaplikasikan dalam bidang astronomi.

C. Pengukuran Sudut

Besarnya suatu sudut dapat ditentukan dengan berbagai cara dengan menggunakan satuan dan menggunakan sebuah alat pengukuran sudut yaitu busur derajat. Besar suatu sudut ditetapkan dengan satuan "derajat" yang ditulis tanda nol kecil di belakang angka satuan derajat (^{0}). Satuan ukuran yang digunakan adalah pengukuran sudut dalam radian dan derajat. Sudut adalah daerah yang dibatasi oleh dua ruas garis dan titik:

- ♣ Satuan sudut diantaranya ialah**:**
  - Derajat
  - Menit
  - Detik
  - Putaran
  - Radian

- ♣ Ukuran sudut

  1° = satu derajat

  1'= satu menit

  1" = satu detik

♣ Hubungan antara derajat, menit, dan detik

$$1^\circ = 60'$$
$$1' = 60''$$

Contoh Soal:

- Derajat dirubah ke menit: Menit dirubah ke derajat:

  $5^\circ = ...'$? 180' $= ....^\circ$?

  $5^\circ = 5 \cdot 60'$ 180' $= \frac{180}{60}$

  $5^\circ = 300'$ 180' $= 3^\circ$

- Menit dirubah ke detik: Detik dirubah ke menit:

  $6' = ...''$?

  $360'' = ...'$?

  $6' = 6 \cdot 60''$ 360'' $= \frac{360}{60}$

  $= 360''$ 360'' $= 6'$

- Derajat dirubah ke detik:

  $3^\circ = ...''$?

  $3^\circ = 3 \cdot 60'$

  $3^\circ = 180'$

  $3^\circ = 180 \cdot 60''$

  $3^\circ = 2800''$

♣ Operasi penjumlahan dan pengurangan pada derajat, menit, dan detik

Contoh Soal Penjumlahan pada derajat, menit, dan detik

- $4^\circ 30' 15'' + 6^\circ 20' 10'' = 10^\circ 50' 25''$
- $13^\circ 40' 20'' + 17^\circ 29' 25'' = 30^\circ 69' 45''$
  $= 31^\circ 9' 45''$

Contoh Soal Pengurangan pada derajat, menit, dan detik

- $6^\circ 13' 25'' - 3^\circ 7' 10'' = 3^\circ 6' 15''$
- $9^\circ 11' 14'' - 4^\circ 7' 16''$
  $= 9^\circ 10' 74'' - 4^\circ 7' 16''$
  $= 5^\circ 3' 58''$

♣ Hubungan antara derajat, radian, dan putaran

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radian}$$

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$1 \text{ putaran} = 360$$

Contoh Soal :

- Derajat dirubah ke dalam bentuk radian**:**
  $180^\circ =$ .... radian?
  $180^\circ = 180 \cdot \frac{\pi}{180}$ radian

$180^\circ = \pi$ radian

- Radian dirubah ke dalam bentuk derajat**:**

$3\,\pi$ radian $= 3\,\pi \,.\, \frac{180^\circ}{\pi}$

$= 3 \,.\, 180^\circ$

$= 540^\circ$

- Putaran dirubah ke dalam bentuk derajat**:**

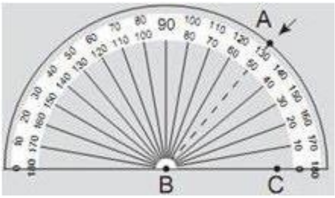
4 putaran $= 4 \,.\, 360^\circ$

$= 1440^\circ$

Berikut macam" pengukuran, antara lain :

1. Mengukur dengan busur derajat.

Pengukuran jenis ini merupakan pengukuran yang hasilnya ditetapkan atau disesuaikan dengan standart penggunaan busur derajat dan satuan derajat. Cara pengukuran sudut trigonometri menggunakan alat bantu busur derajat dapat dilakukan dengan meletakkan busur diatas sudut ABC dan berhimpit garis horizontal pada busur dengan garis alas sudut yaitu garis BC. Lalu lihatlah angka yang ada pada busur yang ditunjukkan oleh garis AB.



2. Mengukur sudut yang dibentuk oleh jarum jam

Permukaan jam yang berbentuk lingkaran memiliki besar sudut yang berkisar 360^0. Permukaan pada jam terbagi atas 12 bagian, tiap bagian memiliki besar = 360^o : 12 = 30^o.

Contoh Soal 1:

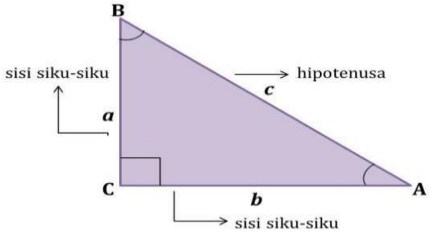
Berapa sudut yang dibentuk oleh pukul 03.00?
Pembahasan:
Pukul 03.00 yang jarum panjang mengarah ke angka 12 dan jarum pendek mengarah ke angka 3, maka besar sudut yang dibentuk : 3 x 30^o = 90^o.

D. Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku

Segitiga siku-siku yaitu segitiga dengan salah satu sudutnya adalah 90°. Dalam segitiga siku-siku terdapat sisi miring yang disebut *hipotenusa*. Kuadrat hipotenusa yaitu jumlah dari kuadrat dua sisi lainnya. Secara sistematis, teorema Pythagoras dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dengan a dan b sebagai sisi siku-siku dan c sebagai sisi miringnya.



Berikut perbandingan yang diperoleh :

1. $\sin A = \dfrac{panjang\ sisi\ siku - siku\ di\ depan\ sudut\ A}{panjang\ hipotenusa} = \dfrac{a}{c}$
2. $\text{Cos}\ A = \dfrac{panjang\ sisi\ siku - siku\ di\ dekat\ (berimpit) sudut\ A}{panjang\ hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$
3. $\text{Tan}\ A = \dfrac{panjang\ sisi\ siku - siku\ di\ depan\ sudut\ A}{panjang\ sisi\ siku - siku\ di\ dekat\ sudut\ A} = \dfrac{a}{b}$

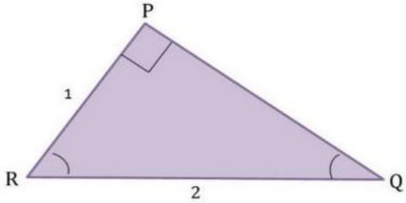
4. $\text{Csc } A = \dfrac{panjang\ \ hipotenusa}{panjang\ sisi\ siku-siku\ di\ depan\ sudut\ A} = \dfrac{c}{a}$

5. $\text{Sec } A = \dfrac{panjang\ \ hipotenusa}{panjang\ sisi\ siku-siku\ di\ depan\ sudut\ A} = \dfrac{c}{b}$

6. $\text{Cot } A = \dfrac{panjang\ sisi\ siku-siku\ di\ dekat\ sudut\ A}{panjang\ sisi\ siku-siku\ di\ depan\ sudut\ A} = \dfrac{b}{a}$

Contoh Soal 2 :

Tentukan nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk sudut Q dan R pada segitiga berikut.



Pembahasan :

PQ = $\sqrt{\text{QR}^2 - \text{PR}^2}$

PQ = $\sqrt{2^2 - 1^2}$

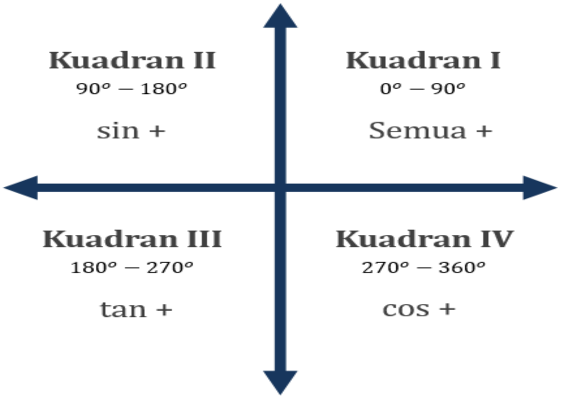
PQ = $\sqrt{4 - 1}$

PQ = $\sqrt{3}$

E. Perbandingan Trigonometri Sudut Berelasi

Sudut pada trigonometri yaitu sudut 0° sampai 360°, dan dalam satu putaran dibagi menjadi 4 kuadran, jadi setiap kuadran terbagi menjadi antara sudut 90°. Sudut - sudut tersebut adalah

Kuadran 1 dari 0° sampai 90°
Kuadran 2 dari 90° sampai 180°
Kuadran 3 dari 180° sampai 270°
Kuadran 4 dari 270° sampai 360°



Perbandingan sudut dan relasi trigonometri merupakan perluasan dari definisi dasar trigonometri tentang kesebangunan pada segitiga siku-siku yang hanya memenuhi sudut kuadran I dan sudut lancip $(0 - 90°)$. Sudut sudut yang berelasi diantaranya ;

a. Sudut yang berelasi dengan 90°

Untuk $\alpha =$ sudut lancip. Maka $(90° - \alpha)$ merupakan sudut kuadran I, sedangkan $(90° + \alpha)$ merupakan sudut sudut kuadran II. Dalam trigonometri, relasi sudut dinyatakan sebagai berikut :

$$sin\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha$$
$$sin\ (90° + \alpha) = cos\ \alpha$$
$$cos\ (90° - \alpha) = sin\ \alpha$$
$$cos\ (90° + \alpha) = -sin\ \alpha$$
$$tan\ (90° - \alpha) = cot\ \alpha$$
$$tan\ 90° + \alpha) = -cot\ \alpha$$
$$csc\ (90° - \alpha) = sec\ \alpha$$
$$csc\ (90° + \alpha) = sec\ \alpha$$
$$sec\ (90° - \alpha) = csc\ \alpha$$

$sec\ (90° + \alpha) = -csc\ \alpha$
$cot\ (90° - \alpha) = tan\ \alpha$
$cot\ (90° + \alpha) = -tan\ \alpha$

b. Sudut yang berelasi dengan 180°

Untuk $\mathrm{a} =$ sudut lancip. Maka $(180° - \mathrm{a})$ merupakan sudut kuadran II, sedangkan $(180° + \mathrm{a})$ merupakan sudut sudut kuadran III. Dalam trigonometri, relasi sudut dinyatakan sebagai berikut

$sin\ (180° - \alpha) = sin\ \alpha$
$sin\ (180° + \alpha) = -sin\ \alpha$
$cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha$
$cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha$
$tan\ 180° - \alpha) = -tan\ \alpha$
$tan\ 180° + \alpha) = tan\ \alpha$
$csc\ (180° - \alpha) = csc\ \alpha$
$csc\ (180° + \alpha) = -csc\ \alpha$
$sec\ (180° - \alpha) = -sec\ \alpha$
$sec\ (180° + \alpha) = -sec\ \alpha$
$cot\ (180° - \alpha) = -cot\ \alpha$
$cot\ (180° + \alpha) = cot\ \alpha$

c. Sudut yang berelasi dengan 270°

Untuk a =sudut lancip. Maka $(270° - a)$ merupakan sudut kuadran III, sedangkan $(270° + a)$ merupakan sudut sudut kuadran IV. Dalam trigonometri, relasi sudut dinyatakan sebagai berikut :

$sin\ (270° - \alpha) = -cos\ \alpha$
$sin\ (270° + \alpha) = -cos\ \alpha$
$cos\ (270° - \alpha) = -sin\ \alpha$
$cos\ (270° + \alpha) = sin\ \alpha$
$tan\ 270° - \alpha) = cot\ \alpha$
$tan\ (270° + \alpha) = cot\ \alpha$
$csc\ (270° - \alpha) = -sec\ \alpha$
$csc\ (270° + \alpha) = -sec\ \alpha$
$sec\ (270° - \alpha) = -csc\ \alpha$
$sec\ (270° + \alpha) = csc\ \alpha$
$cot\ (270° - \alpha) = tan\ \alpha$
$cot\ (270° + \alpha) = -tan\ \alpha$

d. Sudut yang berelasi dengan 360°

Untuk $a =$ sudut lancip. Maka $(360° - a)$ merupakan sudut kuadran IV. Dalam trigonometri, relasi sudut dinyatakan sebagai berikut :
$sin\ (360° - \alpha) = -sin\ \alpha$
$cos\ (360° - \alpha) = cos\ \alpha$
$tan\ (360° - \alpha) = -tan\ \alpha$
$csc\ (360° - \alpha) = -csc\ \alpha$
$sec\ (360° - \alpha) = sec\ \alpha$
$cot\ (360° - \alpha) = -cot\ \alpha$

e. Sudut yang berelasi dengan $(-\alpha)$
$sin\ (-\alpha) = -sin\ \alpha$
$cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha$
$tan\ (-\alpha) = -tan\ \alpha$
$csc\ (-\alpha) = -csc\ \alpha$
$sec\ (-\alpha) = sec\ \alpha$

$cot\ (-\alpha) = -cot\ \alpha$

f. Sudut yang berelasi dengan lebih dari 360°

$sin\ (\alpha + k.360°) = sin\ \alpha$
$cos\ (\alpha + k.360°) = cos\ \alpha$
$tan\ (\alpha + k.360°) = tan\ \alpha$
$csc\ (\alpha + k.360°) = csc\ \alpha$
$sec\ (\alpha + k.360°) = sec\ \alpha$
$cot\ (\alpha + k.360°) = cot\ \alpha$

Contoh Soal 3 :
Tentukan nilai trigonometri berikut :

a. $\sin 45^\circ$
b. $\cos\ 150^\circ$
c. $\tan 330^\circ$
d. $\sin 1140^\circ$

Pembahasan :

a. $\sin 45^\circ = \sin\ (90° - a)$
$= \sin\ (90° - 45°)$
$= \cos\ 45°$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. $\cos\ 150° = \cos\ (90° + 60°)$
$= -\sin a$
$= -\sin 60 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c. $\tan 330° = \tan(360° - a)$
$= tan\ (360° - 30°)$
$= -\tan\ 30°$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d. $\sin 1140° = \sin(60° + 3.360°)$

$$= \sin 60°$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

F. Identitas Trigonometri

Identitas trigonometri merupakan suatu relasi atau kalimat terbuka yang didalamnya memuat fungsi-fungsi trigonometri. Dimana bernilai benar tiap penggantian variabel dengan konstan anggota domain fungsi. Identitas trigonometri menyatakan hubungan dari suatu fungsi trigonometri dengan fungsi trigonometri lainnya. Sebuah identitas trigonometri dapat ditunjukan kebenarannya dengan tiga cara. Cara pertama, dimulai dengan menyederhanakan ruas kiri menggunakan identitas sebelumnya sampai menjadi bentuk yang sama dengan ruas kanan. Cara kedua, mengubah dan menyederhanakan ruas kanan sampai menjadi bentuk yang sama dengan ruas kiri. Cara ketiga, mengubah baik ruas kiri maupun ruas kanan kedalam bentuk yang sama**.** Identitas trigonometri meliputi

- Identitas kebalikan

$$\sin a = \frac{1}{\csc a} \qquad \csc a = \frac{1}{\sin a}$$

$$\cos a = \frac{1}{sec a} \qquad \sec a = \frac{1}{\cos a}$$

$$\tan a = \frac{1}{\cot a} \qquad \cot a = \frac{1}{\tan a}$$

- Identitas perbandingan

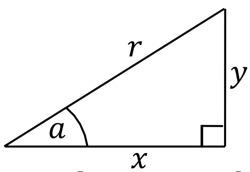
- Identitas Perbandingan

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$$

$$\frac{\cos a}{\sin a} = \cot a$$

- Identitas Pythagoras

Perhatikan gambar di bawah ini



Pada segitiga siku-siku berlaku teorema pythagoras berikut. Jumlah kuadrat sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi miring.

$\leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Mencari Rumus-rumus identitas phytagoras

$x^2 + y^2 = r^2 \quad : x^2$

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$

$1 + \tan^2 a = \sec^2 a$

$x^2 + y^2 = r^2 \quad : y^2$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = \left(\frac{r}{y}\right)$$

$\cot^2 a + 1 = \csc^2 a$

$x^2 + y^2 = r^2 \quad : r^2$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ atau $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \\ 1 + \tan^2 a = \sec^2 a \\ \cot^2 a + 1 = \csc^2 a \end{array}}$$

Terdapat 3 pilihan pembuktikan identitas, yaitu mengaplikasikan beberapa identitas atauvpersamaan dimana kebenarannya sudah diberikan bukti yakni dengan cara:

1) Bentuk bagian kiri dilakukan perubahan sedemikian sehingga ruas kanan tepat sama.
2) Bentuk ruas kanan dilakukan perubahan sedemikian sehingga sama dengan bentuk kiri.
3) Bagian ruas kiri dilakukan perubahan ke dalam bentuk lainnya yang identik, ruas kanan pun diubah juga, sedemikian sehingga keduanya membentuk hasil perubahan yang sama.

Di antaranya ketiganya, langkah yang diutamakan adalah dua cara yang pertama, dikarenakan tiap-tiap ruas jelas tujuan bentuk yang akan dicapai. Umumnya, bagian yang dilakukan perubahan merupakan bentuk yang paling rumit, dilakukan pembuktian sehingga sama dengan bentuk yang tak dilakukan perubahan, dimana bentuknya menjadi lebih sederhana.

Langkah yang kurang tepat dan sering diaplikasikan yaitu:

(1) Kedua ruas dikumpulkan menjadi satu ruas,
(2) apabila bertemu pada bentuk pecahan, dilakukan perkalian secara silang.

Tingkat keberhasilan pembuktian kebenaran suatu identitas membutuhkan:

1) Proses latihan yang cukup
2) Penguasaan hubungan, aturan, atau persamaan dasar trigonometri dan aljabar
3) Penguasaan proses penyederhaanaan, pemfaktoran, dan operasi htiung lainnya dan operasi bentuk aljabar

Dalam proses pembuktian, selain yang disebutkan pada dua butir pertama di atas, yang sangat penting diperhatikan ialah bahwa :

1) Perubahan-perubahan bentuk aljabar yang dilakukan berorientasi pada tujuan (ruas lain yang dituju). Maksudnya, bentuk-bentuk yang dituju biasanya adalah bentuk atau derajat yang lebih sederhana dan dapat ”dipaksakan” adanya dengan penyesuaian bentuk-bentuk lainnya (diarahkan ke bentuk yang menjadi tujuan pembuktian).
2) Selain menggunakan hubungan antara sekan dan tangen, kosekan dan kotangen, fungsi-fungsi tangen, kotangen, sekan dan kosekan dapat diubah ke fungsi sinus atau kosinus.

Contoh Soal 4 :

Buktikan identitas $sin^2\alpha + sin^2\,\alpha\,cos^2\,\alpha + cos^4\,\alpha = 1$!

Pembahasan :

Cara I :

Seperti dikemukakan pada langkah pemecahan masalah, guru dapat memberikan contoh, bahwa :

1) Langkah pertama adalah memahami masalah
   Jelas bahwa masalahnya adalah masalah pembuktian, yaitu bahwa ruas kiri harus sama dengan ruas kanan. Masalah ini memuat keadaan ruas kiri lebih kompleks dari pada ruas kanan. Jadi jika harus membuktikan maka kiranya akan lebih mudah jika dari ruas kiri dibuktikan sama dengan ruas kanan.
2) Merancang rencana
   Bentuk ruas kiri adalah $sin^2\alpha + sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha + cos^4\ \alpha$ yang harus dibuktikan sama dengan 1. Karena tujuannya adalah "1", sedangkan "1" dalam trigonometri muncul dalam rumus $sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, maka perlu dimunculkan adanya bentuk $sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha.$ Hal ini dapat muncul jika dua suku terakhir dari ruas kiri difaktorkan. Jika dua suku terakhir difaktorkan diperoleh :
   $sin^2\alpha + sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha + cos^4 = sin^2\alpha + (sin^2\alpha + cos^2\alpha)cos^2\alpha$

3) Melaksanakan rencana bukti :
   Ruas kiri : $sin^2\alpha + sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha + cos^4\alpha$
   (Cara 1) $= sin^2\alpha + (sin^2\alpha + cos^2\alpha)cos^2\alpha$
   $= sin^2\alpha(sin^2\alpha + cos^2\alpha)cos^2\alpha$
   $= sin^2\alpha + (1)cos^2\alpha$
   = 1 ruas kanan (terbukti)

4) Memeriksa Kembali
   Dalam hal ini pemeriksaan dilakukan hanya dalam hal pemeriksaan kembali langkah demi langkahnya.

Cara II :

a) Jika strategi awalnya adalah penyederhanaan dengan pemfaktoran, maka dengan memfaktorkan dua suku pertamanya diperoleh :

$sin^2\alpha + sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha + cos^4 =$

$sin^2\alpha(1+ cos^2\alpha) + cos^4\alpha$

Berdasarkan tujuan yang hendak dicapai, yaitu ruas kanan adalah 1, maka 1 dalam trigonometri muncul antara lain dari rumus $sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha$ atau secara aljabar dapat muncul dari perkalian bentuk $(1 - x)(1 + x)$. Hal terakhir 'terpikir' karena adanya bentuk $(1 + cos^2\ \alpha)$ yang jika dikalikan dengan $1\ -\ cos^2\ \alpha$ dari $sin^2\ \alpha\ =\ 1\ -\ cos^2\ \alpha$ akan menghasilkan $1\ -\ cos^4\ \alpha$ ada unsur 1 sesuai tujuan.

b) Dari strategi di atas maka langkah pembuktiannya sebagai berikut :

Bukti :

Ruas kiri : $sin^2\ \alpha + sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha + cos^4\ \alpha$

$= sin^2\ \alpha(1 + cos^2\ \alpha) + cos^4\ \alpha$

$= (1 - cos^2\ \alpha)(1 + cos^2\ \alpha) + cos^4\ \alpha$

$= (1 - cos^4\ \alpha) + cos^4\ \alpha$

$= 1$ ruas kanan (terbukti)

Cara III :

a) Jika strategi awalnya adalah penyederhanaan dari suku berderajat tinggi, maka diperoleh: Bentuk ruas kiri diubah menjadi $sin^2\ \alpha + sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha$ yang harus dibuktikan sama dengan 1.

Karena tujuannya adalah ”1”, sedangkan ”1” dalam trigonometri muncul dalam rumus $sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, maka perlu dimunculkan adanya bentuk $sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha$, atau bagian – bagiannya. Hal ini dapat muncul jika ruas kiri difaktorkan sehingga $sin^2\ \alpha + sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha\ cos^2$ dan dengan manipulasi lebih lanjut ruas kiri menjadi $= sin^2\ \alpha(1 + cos^2\ \alpha) + cos^2\ \alpha(1 - sin^2\ \alpha)$ Dengan menjabarkan lebih lanjut hasilnya $= 1$

b) Dari strategi di atas maka langkah pembuktiannya sebagai berikut :

Bukti :

Ruas kiri :

$$sin^2\alpha + sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha + cos^4\alpha$$

$$sin^2\alpha + sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha + cos^2\alpha\ cos^2\alpha$$

$$sin^2\ \alpha(1 + cos^2\ \alpha) + cos^2\ \alpha(1 - sin^2\ \alpha)$$

$$sin^2\alpha + sin^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha + cos^2\alpha - cos^2\alpha sin^2\ \alpha$$

$$sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha$$

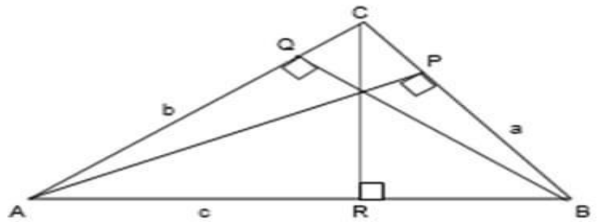
1 ruas kanan (terbukti)

G. Aturan Sinus dan Cosinus

Sebuah, segitiga terdiri dari 3 sisi dan 3 sudut, dengan jumlah ketiga sudut adalah 180°. Untuk segitiga siku-siku, Hanya dibutuhkan 1 sisi dan 1 sudut (tidak termasuk sudut siku-siku) ataupun 2 sisi diketahui. Kita dapat mengetahui perbandingan dari panjang sisi dengan sudut pada segitiga, dan juga menghitung luas segitiga menggunakan prinsip trigonometri.

Untuk menghitung dengan prinsip trigonometri kita akan membutuhkan aturan sinus dan cosinus. Aturan inilah yang akan bisa membantu kita menyelesaikan perhitungan dengan prinsip trigonometri.

1. Aturan Sinus



Pada segitiga ACR $\mathrm{S}inA = \frac{CR}{b}$atau $CR = b.sinA$ … … … … … (1)

Pada segitiga BCR $sinB = \frac{CD}{a} atau\ CR = a.sinB$ … … ….(2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

b $sinA = a \sin B \rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin}$

Pada segitiga APC dan segitiga APB didapat:

$\frac{a}{\sin} = \frac{c}{\sin C}$

Sehingga segitiga ABC sembarang berlaku:

$$\frac{a}{\sin} = \frac{b}{\sin} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Contoh Soal 5 :

Sebuah segitiga diketahui memiliki sudut A=30°, $sisi\ a = 3\ dan\ sisi\ b = 4$. Hitung besar ssudut B,besar sudut C dan panjang sisi C

Pembahasan :

Diketahui:

A=30°

a=3

b=4

ditanya B,C,dan c?

- Menentukan besar sudut B

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$$

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4\sin 30°}{3}=\frac{4\times 0{,}5}{3}=\frac{2}{3}$$

B=$sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=sin^{-1}(0{,}667)=41{,}8°$

Karena sinus bernilai positif baik di kuadran I maupun kuadran II,maka sudut lain yang memenuhi adalah B =$(180°-41{,}8°)=138{,}2°$

- Menentukan besar sudut C

  Jumlah sudut-sudut dlam segitiga adalah 180°,oleh karenaitu berlaku;

  A+B+C=180° → $C=180°-(A+B)$

  Untuk B=41,8° → $C=180°-(30°+41{,}8°)=108{,}2°$

  Untuk B =138,2° → $C=180°-(30°+138{,}2°)=11{,}8°$

- Menentukan panjang sisi c

$$\frac{c}{\sin}=\frac{a}{\sin A}\rightarrow c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

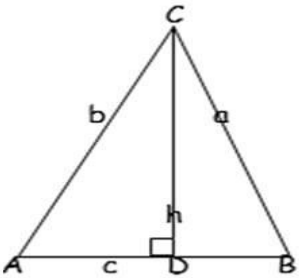
$$c=\frac{3\sin 108{,}2°}{\sin 30°}=\frac{3\times 0{,}95}{0{,}5}=5{,}7$$

$$untuk\ C=11{,}8°$$

$$c=\frac{3\sin 11{,}8°}{\sin 30}=\frac{3\times 0{,}204}{0{,}5}=1{,}22$$

2. Aturan Cosinus

Perhatikan gambar di bawah ini :



Pada segitiga DBC;

Sin B= $\frac{h}{a} \rightarrow h = a \sin B$

Cos B= $\frac{DB}{a} \rightarrow DB = a \cos B$

AD=AB-DB=c – a cos B

Pada segitiga ADC, siku-siku di D:

$b^2 = AD^2 + CD^2$

$b^2 = (c - a \cos B)^2 + (a \sin B)^2$

$b^2 = c^2 - 2\ a\ c \cos B + a^2 cos^2 B + a^2 sin^2 B$

$b^2 = c^2 - 2\ a\ c \cos B + a^2 (cos^2 B + sin^2 B$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2\ a\ c \cos B$

Sehingga aturan cosinus berlaku untuk setiap segitiga ABC sebagai berikut:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \mathrm{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Berdasarkan rumus aturan cosinus di atas, maka di dapatkan rumus untuk menghitung besar sudutnya:

$Cos\ A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$Cos\ B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$

$Cos\ C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Contoh Soal 6 :

Segitiga ABC diketahui panjang sisi a=5cm, panjang sisi c = 6 cm dan besar sudut B=60°.tentukan panjang sisi b?
Pembahasan:
Diketahui
a=5 cm, c = 6 cm dan B = 60°
Ditanya panjang sisi b?
Jawab:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
$b^2 = 5^2 + 6^2$-2(5)(6) cos 60°
$b^2 = 25 + 36 - 60(0,5)$
$b^2 = 61 - 30$
$b^2 = 31$
B = 5,56 cm
Jadi, panjang sisi b adalah 5,56 cm.

H. Luas Segitiga

1. Luas segitiga yang diketahui dua sisi dan satu sudut

$$L\Delta\ ABC = \frac{1}{2} bc\sin A$$
$$L\Delta\ ABC = \frac{1}{2} ac\sin B$$
$$L\Delta\ ABC = \frac{1}{2} ac\sin C$$

2. Luas segitiga yang diketahui dua sudut dan satu sisi

$$L\Delta\ ABC = \frac{a^2.\sin B.\sin C}{2\sin A}$$
$$L\Delta\ ABC = \frac{b^2.\sin A.\sin C}{2B}$$
$$L\Delta\ ABC = \frac{c^2.\sin A.\sin B}{2\sin C}$$

3. Luas segitiga yang diketahui panjang ketiga sisinya

   $L\Delta\ ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

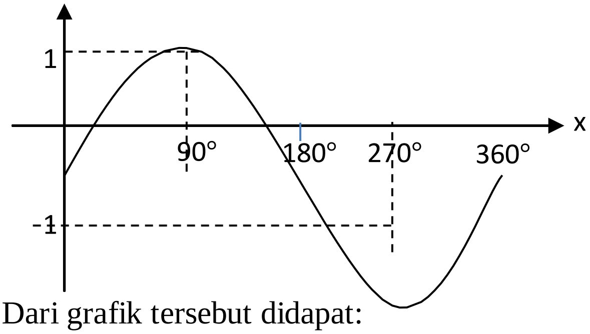
   Dengan $s = \frac{a+b+c}{2}$

I. Grafik Fungsi Trigonometri

Fungsi dimana grafiknya berulang tak hingga pada periode tertentu merupakan pengertian dari fungsi trigonometri**.** Suatu jarak di antara dua lembah/ puncak ataupun jaraka antara awal puncak dan akhir lembah merupakan fungsi dari periode itu sendiri. Terdapat juga amplitudo yang merupakan setengah dari selisih nilai minimum dan maksimum dari suatu fungsi. Rumus amplitudo sebagai berikut: $A = \frac{1}{2}\left(y_{maks} - y_{min}\right)$

Terdapat beberapa fungsi-fungsi trigonometri sederhana, di antaranya fungsi tangen, fungsi cosinus, fungsi sinus, dimana tiap-tiap fungsi, penjelasannya diuraikan pada bentuk grafik baku fungsi trigonometri, seperti berikut.

1. Grafik fungsi sinus .
   a. Bentuk dasar y = f(x) = sin x.



Dari grafik tersebut didapat:

- Nilai maksimum = 1 dan nilai minimum = -1
- Amplitudo = maks – min = 1 – (-1) =2
- Periode = 360° $= 2\pi$

b. Bentuk umum y = a sin(kx$\pm b$); dengan a, b dan k adalah bilangan real serta a $\neq 0, k \neq 0$.

Dari bentuk umum tersebut dapat diperoleh:

- Nilai maks = $|a|$ dan nilai min = -$|a|$.
- Amplitudo = $|2a|$
- Periode = $\frac{360°}{\pi}$.

Langkah menggambar grafik fungsi sin x.

$\boxed{y = \sin x}$ - - - -> Bentuk dasar, periodenya: 2π

$\boxed{y = \sin kx}$ - - - -> Periodenya : $\frac{2\pi}{k} = \frac{360°}{k}$

$\boxed{y = \sin(kx \pm b)}$ - - - ->

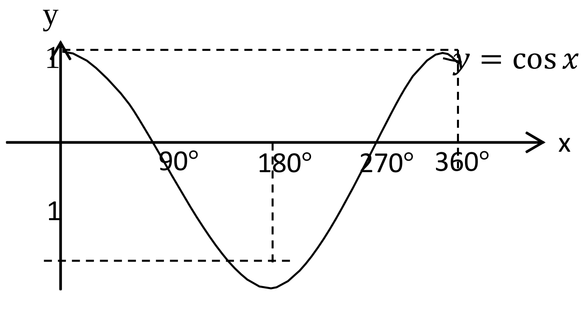
Jika (+) geser kurva kekiri sebesar $\frac{b}{k}$

Jika (-) geser kurva kekanan sebesar $\frac{b}{k}$

$\boxed{y = a\sin(kx \pm b)}$ - - - -> Perbesar kurva maks menjadi $|a|$ dan min $-|a|$

2. Grafik fungsi cos x.

a. Bentuk dasar y = f(9x) =cos x.



Dari grafik tersebut didapat :

- Nilai maksimum = 1 dan nilai minimum = -1.
- Amplitudo = maks – min =1 – (-1)=2
- Periode = $360°$ $=2\pi$.

b. Bentuk umum $y = a\cos(kx \pm b)$; dengan a, b dan k adala bilangan real serta $a \neq 0, k \neq 0$.

Dari bentuk umum tersebut dapat diperoleh :

- Nilai maks = $|a|$ dan nilai min = -$|a|$.
- Amplitudo = $|2a|$.
- Periode = $\frac{360°}{\pi}$

Langkah menggambar grafik cos x.

$\boxed{y = \cos x}$ - - - -> Bentuk dasar, periodenya 2π

$\boxed{y = \cos kx}$ - - -> Periode : $\frac{2\pi}{k} = \frac{360°}{k}$

$\boxed{y = \cos(kx \pm b)}$ - - -> Jika (+)geser kurva kekiri sebesar $\frac{b}{k}$

Jika (-)geser kurva kekanan sebesar $\frac{b}{k}$

$\boxed{y = a\cos(kx \pm b)}$ - - -> Perbesar kurva maks menjadi maks $|a|$ dan min $|a|$

3. Grafik fungsi tan x.

   a. Bentuk dasar y = f (x) = tan x.

      Dari grafik tersebut didapat:

      - Nilai maksimum = ~ dan nilai minimum = ~.
      - Amplitudo = ~
      - Periode = 180° $= \pi$.

   b. Bentuk umum $y = a\tan(kx \pm b)$;

      Dengan a, b dan k adalah bilangan real serta $a \neq 0, k \neq 0$.

      Dari bentuk umum tersebut dapat diperoleh :

      - Nilai maks = ~dan nilai min = ~.
      - Amplitudo = ~.
      - Periode = $\frac{180°}{\pi}$.

      Langkah menggambar grafik fungsi tan x.

$\boxed{y = \tan x}$ - - -> Bentuk dasar periodenya π

$\boxed{y = \tan kx}$ - - -> Periodenya : $\frac{\pi}{k} = \frac{180°}{k}$

$\boxed{y = \tan(kx \pm b)}$ - - -> Jika (+) geser kurva kekiri sebesar $\frac{b}{k}$

Jika (-) geser kurva kekanan sebesar $\frac{b}{k}$

$\boxed{y = a\cos(kx \pm b)}$ - - -> Perbesar kurva sebesar/diperkecil a kali setiap nilai x nya.

Contoh Soal 7 :

Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi trigonometri $f(x) = 2 \sin 2x + 5$

Pembahasan :

$f(x) = 2 \sin 2x + 5 \rightarrow a = 2$, $c = 5$

Nilai maksimum = $|a| + c = |2| + 5 = 7$

Nilai minimum = $-|a| + c = -|2| + 5 = 3$

J. Rangkuman

Sejarah awal trigonometri dapat dilacak dari zaman mesir kuno, Babilonia dan peradaban Lembah Indus, lebih dari 3000 tahun yang lalu. Matematikawan India adalah perintis penghitungan variabel aljabar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri.

Trigonometri berasal dari bahasa Yunani yaitu trigonon yang artinya tiga sudut dan metro yang artinya mengukur. Oleh karena itu trigonometri adalah sebuah cabang dari ilmu matematika yang berhadapan dengan sudut segi tiga dan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen. Sedangkan definisi dari trigonometri menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) adalah ilmu ukur mengenai sudut dan sepadan dengan segi tiga (digunakan dalam astronomi).

Besarnya suatu sudut dapat ditentukan atau dapat diukur dengan berbagai cara dengan menggunakan satuan dan menggunakan sebuah alat pengukuran sudut yaitu busur derajat. Besar suatu sudut ditetapkan dengan satuan "derajat".

Perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku, Segitiga siku-siku yaitu segitiga dengan salah satu sudutnya adalah 90°. Dalam segitiga siku-siku terdapat sisi miring yang disebut hipotenusa.

Perbandingan trigonometri sudut yang berelasi. Perbandingan sudut dan relasi trigonometri merupakan perluasan dari definisi dasar trigonometri tentang kesebangunan pada segitiga siku-siku yang hanya memenuhi sudut kuadran I dan sudut lancip $(0 - 90°)$.

Identitas trigonometri merupakan suatu relasi atau kalimat terbuka yang di dalamnya memuat fungsi-fungsi trigonometri.

Aturan sinus adalah perbandingan panjang sisi sebuah segitiga dengan sinus sudut yang menghadapnya memiliki nilai yang sama.

Aturan cosinus akan menjelaskan hubungan antara kuadrat panjang sisi dengan nilai cosinus dari salah satu sudut pada segitiga.

Fungsi trigonometri merupakan suatu fungsi yang grafiknya berulang secara terus menerus dalam periode tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

Astuti A.Y, Miyanto, dan Noviana E.S. 2022. *Matematika untuk kelas XI SMA/MA Semester 2.* Yogyakarta: Intan Pariwara.

Herlina ahmad, febryanti, kasbawati,irwan aki.2022. *Buku Trigonometri*. Sulawesi Selatan: Yayasan Ahmar Cendekia Indonesia.

Herry Agus Susanto dan Eko Rini Prasetyowati. 2019. *Matematika Peminatan Persamaan Trigonometri,* Yogyakarta: Budi Utama.

Kariadinata, Rahayu. 2018. *Trigonometri Dasar.* Bandung: Pustaka Setia Bandung.

Krismanto, Ali. 2008. *Pembelajaran Trigonometri SMA.*Yogyakarta: Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika

Prasetya Adhi Nugroho. 2013. *Big Bank Soal-Bahas Matematika SMA/MA.* Jakarta Selatan : Wahyumedia

Rahayu Kariadinata.2018. *Trigonometri Dasar.* Bandung:Cv Pustaka Setia

Rustam Setting. 2017. *The King Bedah Tuntas Kisi-Kisi UN SMA IPS*, Yogyakarta : Forum Edukasi.

Sartono Wirodikromo. 2007. *Matematika Jilid 2 Untuk SMA XI.* Jakarta : Erlangga.

Simanngunsong, Wilson. 2012. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga

Sukino. 2020. *Penuntun penyelesaian Matematika Wajib.* Bandung: Yrama Widya.

Tim Kreatif CCM. Cara Cepat Menguasai Matematika SMA/MA. Jakarta : PT Bumi Aksara.

Tim medika Eduka *: Modul Sakti Utbk Sbmptn Matematika Saintek.*Jakarta : Lembaga Test Masuk Perguruan Tinggi

Tim Study Center.2019*, Sukses UN-USBN SMA/MA IPA 2020.* Jakarta : Bintang Wahyu.

Wono setya budhi.2016. *Buku Bupena Matematika Smp/Mts Kelas VIII*, Jakarta: PT Gelora Aksara Pratama.