

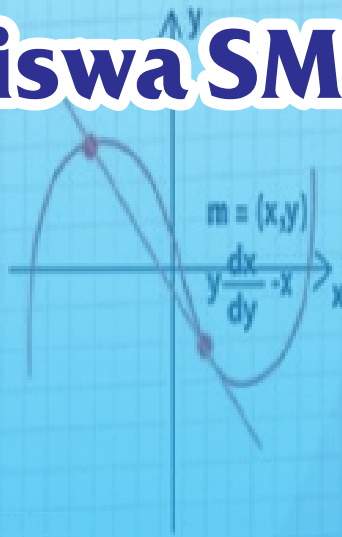
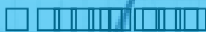


Joko Budiono
Netriwati, M.Pd
Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd
Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd
Abi Fadila, M.Pd

$$y = x^3 - 3x + 4$$



MENGUASAI DIFERENSIAL Untuk Siswa SMA



Aspek Pembelajaran

Joko Budiono
Netriwati, M.Pd
Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd
Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd
Abi Fadila, M.Pd

MENGUASAI DIFERENSIAL Untuk Siswa SMA



Penerbit **Arjasa Pratama**, Bandar Lampung

MENGUASAI DIFERENSIAL Untuk Siswa SMA

Joko Budiono
Netriwati, M.Pd
Rizki Wahyu Yunian Putra, M.Pd
Dr. Bambang Sri Anggoro, M.Pd
Abi Fadila, M.Pd

Pemindai Aksara : Hermansyah
Penata Letak: Roni Fajar
Desain Sampul : Nu'man

Penerbit:

Arjasa Pratama

Jl. Veteran I No 18 Harapan Jaya, Sukarame, Bandar Lampung
cvarjasapratama@gmail.com | 0721-5640386 | 0852 3194 5055

Anggota IKAPI Jakarta
www.arjasapratama.com

Cetakan Pertama : Mei 2021

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014

Tentang Hak Cipta

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).
3. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).
4. Setiap Orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah).

ISBN : 978-623-96842-8-0

Dicetak oleh Percetakan CV Arjasa Pratama, Bandar Lampung
Isi diluar tanggung jawab Percetakan



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI RADEN INTAN LAMPUNG
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN

Alamat: Jl. Leikol. H. Endro Suratmin Sukarame Bandar Lampung 35131 Telp. (0721) 703260

PENGESAHAN

Skripsi dengan judul: **MENGUASAI DIFERENSIAL UNTUK SISWA SMA**,
disusun oleh, Nama: **JOKO BUDIONO**, NPM. 1411050313, Jurusan Pendidikan
Matematika, telah diujikan dalam Sidang Munaqasyah Fakultas Tarbiyah dan
Keguruan pada hari / tanggal: **Senin / 31 Mei 2021** pukul 08.00 s.d 10.00.

TIM MUNAQASYAH

Ketua : **Dr. H. Subandi, MM.**

Sekretaris : **Abi Fadila, M. Pd.**

Penguji Utama : **Dr. Bambang Sri Anggoro, M. Pd.**

Pembahas I : **Hj. Netriwati, M. Pd.**

Pembahas II : **Rizki Wahyu Yunian Putra, M. Pd.**

Mengetahui,
Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan

Prof. Dr. Hj. Nirva Diana, M. Pd.
NIP. 196408281988032 002

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur bagi Allah SWT, Tuhan Semesta Alam, atas rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan buku yang berjudul “Menguasai Diferensial Untuk Siswa SMA”. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa buku ini dapat terselesaikan berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, penulis ucapkan terima kasih kepada pihak yang telah banyak membantu dan hanya Allah SWT yang mampu membalas segala kebaikan yang telah diberikan kepada penulis. Amiin

Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi semua aspek, khususnya bagi peserta didik sebagai pedoman belajar dalam menyelesaikan berbagai soal-soal yang berkaitan dengan turunan, dan semoga buku ini juga bermanfaat sebagai bahan pembelajaran. Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam buku ini, untuk itu dengan terbuka dan rendah hati penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan selanjutnya sehingga buku ini dapat semakin baik dan lengkap.

Bandar Lampung, Mei 2021

Penulis,



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

KATA PENGANTAR iii

DAFTAR ISI iv

BAB I PENDAHULUAN 1

A. Latar Belakang 1

B. Sejarah Turunan 2

C. Aplikasi Turunan 3

D. Peta Konsep 8

BAB II MATERI 9

1. Turunan 11

2. Rumus-Rumus Turunan 12

a. Rumus 1 12

b. Rumus 2 12

c. Rumus 3 12

d. Rumus 4 13

e. Rumus 5 13

f. Rumus 6 13

g. Rumus 7 13

h. Rumus 8 13

i. Rumus 9	14
j. Rumus 10 (Dalil rantai)	14
3. Turunan Tingkat Tinggi	15
4. Turunan Implisit	16
5. Turunan Parsial	17
6. Aplikasi Turunan	18
BAB III SOAL DAN PEMBAHASAN	20
LATIHAN	84
KUNCI JAWABAN	89
DAFTAR PUSTAKA	



BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika merupakan suatu sarana berpikir untuk mengkaji sesuatu secara logis, kritis, rasional, dan sistematis serta melatih kemampuan peserta didik agar terbiasa dalam memecahkan suatu masalah yang ada di sekitarnya. Dengan demikian, diharapkan dapat dikembangkan potensi diri dan sumber daya yang dimiliki peserta didik. Karena itu, hendaknya pembelajaran matematika dapat terus ditingkatkan hingga mencapai taraf kualitas yang lebih baik. Pada kenyataannya matematika sering dianggap sebagai mata pelajaran yang sulit untuk dimengerti. Selama ini, pada umumnya siswa hanya bermodal menghafal rumus untuk menyelesaikan soal-soal matematika. Sehingga penulis, menulis buku ini sebagai bahan ajar tambahan agar peserta didik dapat memahami matematika secara baik, buku ini penulis tulis sebagai pengganti skripsi, dikarenakan keterlambatan penulis dalam mengerjakan skripsi sehingga tercetuslah buku ini.

Keterlambatan penulis dalam mengerjakan skripsi dikarenakan kesalahan yang telah penulis lakukan, dan juga kekurangmampuan penulis dalam membayar uang kuliah tunggal menjadikan bertambah panjangnya keterlambatan penulis



dalam mengerjakan skripsi, penulis bersyukur kepada Allah dan berterima kasih kepada pihak akademik yang telah mengizinkan penulis untuk menulis buku sebagai pengganti tugas akhir.

B. Sejarah dan Tokoh Penemu Turunan

Karena turunan merupakan salah satu cabang diferensial kalkulus, maka sejarah perkembangannya juga berhubungan erat dengan perkembangan kalkulus. Konsep turunan dipikirkan pada saat yang bersamaan oleh Sir Isaac Newton (1642 - 1727), ahli matematika dan fisika bangsa Inggris dan Gottfried Wilhem Leibniz (1646 - 1716), ahli matematika bangsa Jerman.



Gottfried Wilhem Leibniz



Sir Isaac Newton adalah salah seorang penemu dan kontributor kalkulus yang terkenal.

Sejarah perkembangan kalkulus dibagi menjadi beberapa zaman.

1. Pada zaman kuno, pemikiran integral kalkulus sudah muncul, tetapi belum dikembangkan secara baik dan lebih teratur. Fungsi utama dari integral kalkulus adalah perhitungan volume dan luas yang ditemukan kembali pada Papyrus Moskwa dari Mesir. Pada Papyrus tersebut, orang

Mesir dapat menghitung volume piramida yang mereka bangun. Selanjutnya, Archimedes mengembangkan pemikiran ini lebih jauh lagi.

2. Pada zaman pertengahan, matematikawan yang berasal dari India, bernama Aryabhata, menggunakan konsep kecil tak terhingga pada tahun 499 dan menunjukkan masalah astronomi dalam bentuk persamaan diferensial dasar. Persamaan ini kemudian membawa Bashkara II pada abad ke-12 melakukan pengembangan terhadap bentuk awal turunan.
3. Pada abad ke-12, seorang Persia bernama Sharaf al-Din al-Tusi menemukan turunan dari fungsi kubik, sebuah hasil yang penting dalam kalkulus diferensial. Leibniz dan Newton mendorong pemikiran-pemikiran ini bersama sebagai sebuah kesatuan dan kedua orang tersebut dianggap sebagai penemu kalkulus secara terpisah dalam waktu yang hampir bersamaan. ¹

C. Aplikasi Turunan

Turunan memiliki banyak aplikasi dalam bidang kuantitatif. Salah satunya adalah hukum gerak Newton yang kedua yang menyatakan bahwa turunan dari momentum suatu benda juga sama dengan gaya yang diberikan kepada benda. Laju reaksi dari reaksi kimia juga termasuk turunan. ²

¹ Djumata, w, *Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika 2 : Kelas XI Sekolah Menengah Atas / Madrasah Aliyah*, Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional hlm 250

² Mahmudi, Sri Harini, *Matematika Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Widya Utama. Hlm 204

Dengan fungsinya dalam bidang ekonomi, turunan juga dapat memberikan Strategi yang terbaik untuk perusahaan yang sedang dalam persaingan. Turunan dapat menghitung efektivitas waktu dan tenaga kerja agar biaya menjadi minimum. Kemudian, turunan juga dapat menghitung berapa jam pabrik harus bekerja agar keuntungan menjadi maksimal.

Pada materi turunan ini banyak yang berpendapat sangat sulit untuk dikerjakan, terlebih materi turunan ini termasuk dalam materi pokok matematika, turunan merupakan cabang dari pelajaran kalkulus, pada dasarnya materi kalkulus ini memerlukan ketelitian dan kecermatan dalam menggerakkannya. Maka dari itu, penulis membuat buku ini bertujuan untuk mempermudah dalam pembelajaran pada khususnya materi turunan, dalam buku ini disajikan materi beserta soal dan pembahasan yang mudah dipahami.

Diferensial kalkulus itu sangat penting peranannya dalam kehidupan sehari-hari, dunia bisnis maupun dalam dunia sains. Dengan mempelajari diferensial kalkulus, dapat membantu arsitek dalam membuat konstruksi bangunan, melakukan pencampuran bahan bangunan, membuat tiang-tiang, langit-langit pada bangunan. Penggunaan lain dalam diferensial kalkulus yaitu, dalam pembuatan pesawat, kapal laut dengan menggunakan diferensial kalkulus. Turunan juga memiliki fungsi penting apalagi nantinya dapat berguna dalam bidang ekonomi, dalam menghitung nilai minimum dan maksimum sebuah keuangan.³

³ <https://rumushitung.com/2014/01/14/rumus-turunan-diferensial-matematika/>, diakses selasa 18 mei 2021

Mempelajari turunan tidaklah sulit, hanya saja perlu ketelitian agar turunan yang dihasilkan nanti benar. Apalagi turunan hanya menggunakan konsep hitung yang dasar seperti perkalian, pembagian, atau penjumlahan dan pengurangan. Tanpa ketelitian mengerjakan turunan memang terkadang sulit dan perlu diperiksa ulang hingga benar. Ketelitian berkaitan erat dengan kesabaran orang yang teliti tidak dapat terburu-buru dalam melakukan sebuah hal, sejalan dengan yang telah difirmankan oleh Allah dalam Qur'an Surat Al-Baqarah ayat 153

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا اسْتَعِينُوا بِالصَّبْرِ وَالصَّلَاةِ إِنَّ اللَّهَ مَعَ الصَّابِرِينَ

Artinya:

Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar.

Karena sebegitu pentingnya orang yang bersabar Allah juga menurunkan firmanNya dalam Qur'an Surat Al-Imran ayat 146

وَكَأَيِّن مِّن نَّبِيٍّ قَاتَلَ مَعَهُ رَبُّهُنَّ كَثِيرًا فَمَا وَهَنُوا لِمَا أَصَابَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ وَمَا ضَعُفُوا وَمَا اسْتَكَانُوا وَاللَّهُ يُحِبُّ
الصَّابِرِينَ

Artinya:

Dan berapa banyaknya nabi yang berperang bersama-sama mereka sejumlah besar dari pengikut (nya) yang bertakwa. Mereka tidak menjadi lemah karena bencana yang menimpa mereka di jalan Allah, dan tidak lesu dan tidak (pula) menyerah (kepada musuh). Allah menyukai orang-orang yang sabar.

Dari ayat di atas dijelaskan bahwasanya manusia diwajibkan untuk bersabar, dan manusia harus memiliki ketelitian dalam hidup, beristiqomah dalam

mengerjakan segala sesuatu. Begitu penting kesabaran dan ketelitian, sebagaimana firman Allah SWT dalam QS Al-A'raaf ayat 204:

وَإِذَا قُرِئَ الْقُرْآنُ فَاسْتَمِعُوا لَهُ وَأَنْصِتُوا لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ

Artinya:

*Dan apabila dibacakan Al Quran, maka dengarkanlah baik-baik, dan perhatikanlah dengan tenang agar kamu mendapat rahmat.*⁴

Ayat diatas menjelaskan bahwa, kalimat perintah pada kata sami'u artinya dengarkanlah dan pada kata ansitu artinya perhatikanlah. Oleh karena itu membaca, mendengarkan dan memperhatikan adalah kunci utama ilmu pengetahuan. Berkaitan dengan materi defirensial dibutuhkan kecermatan dalam membaca ketelitian dalam memahami dan kesabaran dalam mengerjakannya.

Dari aplikasi turunan dijelaskan juga turunan memiliki kaitannya dengan sains, teknologi dan juga ekonomi, dalam hal tersebut Allah telah berfirman

هُوَ الَّذِي خَلَقَ لَكُمْ مَّا فِي الْأَرْضِ جَمِيعًا ثُمَّ أَسْتَوَىٰ إِلَى السَّمَاءِ فَسَوَّاهُنَّ سَبْعَ سَمَوَاتٍ وَهُوَ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ

Artinya:

Dialah Allah, yang menjadikan segala yang ada di bumi untuk kamu dan Dia berkehendak (menciptakan) langit, lalu dijadikan-Nya tujuh langit. Dan Dia Maha Mengetahui segala sesuatu. (Qs Al-Baqarah 29)

أَلَمْ تَرَوْا أَنَّ اللَّهَ سَخَّرَ لَكُمْ مَّا فِي السَّمَوَاتِ وَمَا فِي الْأَرْضِ وَأَسْبَغَ عَلَيْكُمْ نِعْمَهُ ظَهْرَةَ وَبَاطِنَةً وَمِنَ النَّاسِ مَن يُجَادِلُ فِي اللَّهِ بِغَيْرِ عِلْمٍ وَلَا هُدًى وَلَا كِتَابٍ مُّنِيرٍ

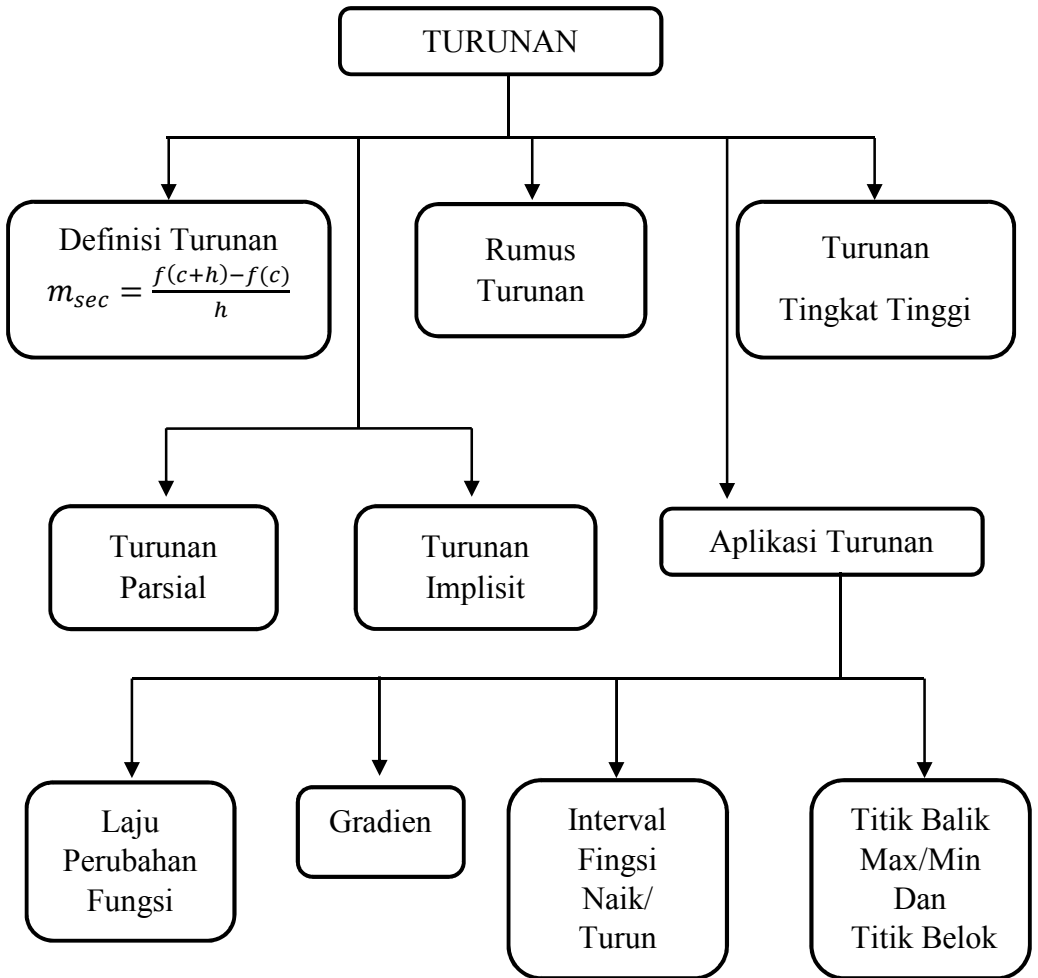
⁴ Al-Qur'an Surat Al-A'raaf ayat 204

Artinya:

Tidakkah kamu perhatikan sesungguhnya Allah telah menundukkan untuk (kepentingan)mu apa yang di langit dan apa yang di bumi dan menyempurnakan untukmu nikmat-Nya lahir dan batin. Dan di antara manusia ada yang membantah tentang (keesaan) Allah tanpa ilmu pengetahuan atau petunjuk dan tanpa Kitab yang memberi penerangan. (QS Lukman: 20)

Sebagaimana ayat-ayat di atas manusia dituntut untuk mencari ilmu pengetahuan karena manusia merupakan pemimpin di bumi. Dalam kaitannya dengan materi kita yaitu turunan ayat al-Qur'an di atas menjelaskan seberapa penting kita untuk menuntut ilmu, juga pentingnya bersabar dalam melakukan pengerjaan soal – soal dalam materi diferensial, namun tak hanya sabar dibutuhkan pula ketelitian dan pemahaman dalam menyelesaikan aplikasi turunan yang terfapat soal – soal cerita yang membutuhkan kecermatan dalam membaca dan memahaminya. Sehingga dibuatlah buku ini sebagai acuan dalam memahami materi diferensial.

PETA KONSEP



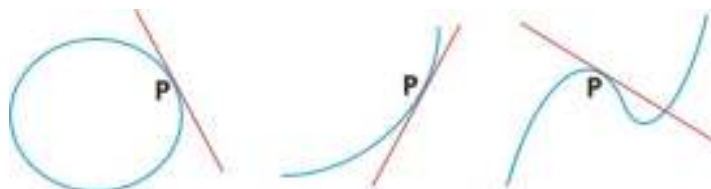
BAB II

MATERI

A. DEFINISI TURUNAN

Dalam kegiatan belajar mengajar mata pelajaran matematika menjadi mata Pelajaran wajib. Baik tingkat bawah, menengah, atas ataupun perguruan tinggi, Dalam kehidupan sehari-hari pun kita tidak lepas dengan yang namanya matematika. Seperti penjumlahan pengurangan pembagian dan lain-lain. Dalam hal ini, kita dapat menguraikan materi tentang turunan.

Beberapa hal yang dapat dijelaskan dalam uraian buku ini merupakan perluasan dan pendalaman dari materi kalkulus differensial, yang membahas tentang turunan.



Perhatikan sebuah titik P yang terletak pada sebuah kurva di bidang kartesius. Apakah yang dimaksud dengan garis singgung di titik P ...?

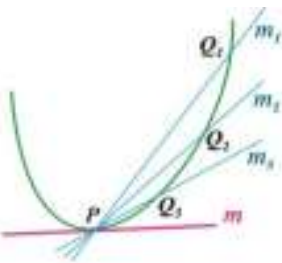
Menurut Euclides garis singgung adalah garis yang memotong kurva tersebut di satu titik, lalu bagaimana dengan kurva ketiga di atas...?

Garis tali busur m_1 menghubungkan titik P dan Q_1 pada kurva. Selanjutnya, titik Q_1 kita gerakkan mendekati titik P . Saat sampai di posisi Q_2 , tali busur

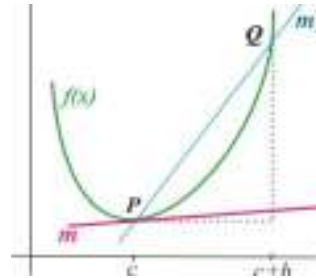
berubah menjadi garis m_2 . Proses ini diteruskan sampai titik Q_1 'berimpit' dengan titik P dan garis tali busurnya menjadi garis singgung m . (gambar 1)

Agar fenomena ini dapat dirumuskan secara matematis, Kemiringan garis tali busur yang melalui P dan Q adalah: $m_{sec} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ (gambar 2). Kemiringan garis singgung di titik $P = (c, f(c))$ didefinisikan sebagai:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} m_{sec} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



gambar 1



gambar 2

Contoh

Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $f(x) = x^2$ di titik (3, 6)

Penyelesaian

$$\begin{aligned} M_{\tan} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+h)}{h} \\
&= 6
\end{aligned}$$

1. Turunan

Kita telah pelajari bahwa kemiringan garis singgung. Selanjutnya, kita dapat memasuki materi pokok yaitu turunan.

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca f aksen) yang nilainya sembarang bilangan x yaitu:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Contoh:

jika $f(x) = 13x - 6$ carilah $f'(4)$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(13(4+h) - 6) - (13(4) - 6)}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{13h}{h} \\
 &= 13
 \end{aligned}$$

2. Rumus-Rumus Turunan

a. Jika $y = f(x) = c$ ($c = \text{konstan}$), maka $f' = 0$

Contoh:

Jika $y = f(x) = 5$, maka $f' = 0$

b. Jika C dan n adalah bilangan real dan $f(x) = Cx^n$, maka $f'(x) = Cnx^{n-1}$

Contoh:

$$F(x) = 3x^4$$

$$F'(x) = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3$$

c. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua bilangan yang memiliki turunan, maka:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d[f(x)]}{dx} \pm \frac{d[g(x)]}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

Contoh:

$$F(x) = 2x^3 \text{ dan } g(x) = 4x^2$$

$$H(x) = f(x) + g(x) = 2x^3 + 4x^2$$

$$H'(x) = f'(x) + g'(x) = 6x^2 + 8x$$

d. Jika $f(x) = ce^x$, maka $f'(x) = ce^x$

Contoh

$$F(x) = 2e^x$$

$$F'(x) = 2e^x$$

e. Jika $f(x) = c \ln x$, maka $f'(x) = \frac{c}{x}$

Contoh

$$F(x) = 6 \ln x$$

$$F'(x) = \frac{6}{x}$$

f. Jika $f(x) = a^x$, maka $f'(x) = a^x \ln a$

Contoh

$$F(x) = 4^x$$

$$F'(x) = 4^x \ln 4$$

g. Jika $f(x) = a^{(p \log x)}$, maka $f'(x) = \frac{a}{x \ln p}$

Contoh

$$F(x) = 6^{(4 \log x)}$$

$$F'(x) = \frac{6}{x \ln 4}$$

**h. Jika $u(x)$ dan $v(x)$ memiliki turunan terhadap x dan $f(x) = u(x) \cdot v(x)$
maka $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$**

Contoh

$$F(x) = (3x^4 + 6)(3x - 1)$$

$$u(x) = (3x^4 + 6)$$

$$u'(x) = 12x^3$$

$$v(x) = (3x - 1) \qquad v'(x) = 3$$

$$\begin{aligned} F(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 12x^3 \cdot (3x - 1) + (3x^4 + 6) \cdot 3 \\ &= (36x^4 - 12x^3) + (9x^4 + 18) \\ &= 45x^4 - 12x^3 + 18 \end{aligned}$$

i. Jika $u(x)$ dan $v(x)$ memiliki turunan terhadap x dan $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$,

maka $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Contoh

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{3x - 2}{2x + 1} \\ u(x) &= 3x - 2 \quad u'(x) = 3 \\ v(x) &= 2x + 1 \quad v'(x) = 2 \\ &= \frac{3(2x + 1) - (3x - 2) \cdot 2}{[2x + 1]^2} \\ &= \frac{(6x + 3) - (6x - 4)}{[2x + 1]^2} \\ &= \frac{7}{(2x + 1)^2} \end{aligned}$$

j. Dalil rantai

Y adalah fungsi z dan z adalah fungsi x, jika $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{dt}{dx}$ ada, maka y

adalah fungsi x dan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$

Contoh:

$$y = \frac{1}{2} (4x + 2)^2$$

Misalnya:

$$t = 4x + 2 \qquad \frac{dt}{dx} = 4$$

$$y = \frac{1}{2} t^2 \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} (2)t = t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = (t)(4) = 4t = 4(4x + 2)$$

3. Turunan Tingkat Tinggi

$F'(x)$ adalah turunan dari sebuah fungsi $f(x)$. Jika $f'(x)$ diturunkan lagi ke x , maka diperoleh turunan kedua dari $f(x)$ dan disebut *derivative* kedua, jika *derivative* tersebut diturunkan terus menerus dapat diperoleh:

- a. Turunan ke 3 = *derivative* 3
- b. Turunan ke 4 = *derivative* 4
- c. Turunan ke 5 = *derivative* 5
- d. Turunan ke n = *derivative* n

Turunan ke 2, 3, 4, ... n disebut dengan turunan tingkat tinggi, beberapa notasi berbeda untuk menyatakan turunan tingkat tinggi sebagai berikut:

Fungsi	Turunan 1	Turunan 2	Turunan 3	Turunan ke- n
$Y = f(x)$	Y'	Y''	Y'''	Y^n
$Y = f(x)$	$F'(x)$	$F''(x)$	$F'''(x)$	F^n
$Y = f(x)$	$D_x f(x)$	$D_x^2 f(x)$	$D_x^3 f(x)$	$D_x^n f(x)$
$Y = f(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh:

$$Y = 2x^3 + 3x^2 - x + 4$$

Tentukan turunan ke 4!

$$Y' = 6x^2 + 6x - 1$$

$$Y'' = 12x + 6$$

$$Y''' = 12$$

$$Y'''' = 0$$

4. Turunan Fungsi Implisit

Cara penulisan suatu fungsi yang dinyatakan dengan $y = f(x)$, disebut dengan eksplisit. Jadi, turunan fungsi yang telah kita pelajari sebelumnya merupakan turunan eksplisit. Perhatikan persamaan berikut!

$$y^3 + 7y = 8$$

Himpunan pasangan berurutan yang memenuhi persamaan tidak membentuk suatu fungsi, karena $(3, 2)$ dan $(-3, 2)$ keduanya berada dalam himpunan pasangan berurutan. Jika diberikan batas maka menjadi:

$$y^3 + 7y = 8$$

$$y > 0$$

Jadi persamaan $y^3 + 7y = 8$. Secara implisit mendefinisikan $y = f(x)$. Fungsi implisit ditulis sebagai berikut:

$$F(x, y) = c$$

Untuk memperoleh turunan fungsi x maka digunakan diferensial semua suku terhadap x , kemudian selesaikan secara aljabar didapat $\frac{dy}{dx}$

Contoh:

$$y^2 = 8x$$

$$\frac{dy}{dx} (y^2) = \frac{dy}{dx} (8x)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}$$

5. Turunan parsial

Fungsi atau relasi dua variabel ditulis dengan

$$Z = f(x, y)$$

Dapat ditentukan derivative dari $f(x, y)$ terhadap y dengan mengambil x tetap ataupun sebaliknya. Derivative yang demikian x disebut dengan derivative parsial dengan notasi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ini menunjukkan derivative parsial fungsi $z = f(x, y)$ terhadap x , yaitu derivative terhadap x yang artinya mengambil y tetap. Lambang lain dari $\frac{\partial z}{\partial x}$ yaitu:

$$f_x \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial x}$$

Contoh:

$$Z = 3x^4 + 2x^3y^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^3 + 6xy^2 \quad \text{terhadap } x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 + 12y^2 \quad \text{terhadap } y$$

6. Aplikasi turunan (Grafik Suatu Kurva)

Untuk membuat grafis suatu kurva $y = f(x)$, memiliki beberapa aturan derivative yang dapat digunakan yaitu:

- Jika $f'(x_1) > 0$, maka grafik $y = f(x)$ naik di titik x_1
- Jika $f'(x_1) < 0$, maka grafik $y = f(x)$ turun di titik x_1
- Jika $f'(x_1) = 0$, maka titik (x_1, y_1) adalah titik ekstrim (kritis/ balik/ stasioner)
- Jika $f''(x_1) > 0$, maka titik (x_1, y_1) adalah titik ekstrim (kritis/balik/ stasioner) minimum
- Jika $f''(x_1) < 0$, maka titik (x_1, y_1) adalah titik ekstrim (kritis/balik/ stasioner) maksimum
- Jika $f''(x_1) = 0$, maka titik (x_1, y_1) adalah titik belok

Contoh:

Tentukan interval dari $y = f(x) = x^2 + 2x^3 - 6x + 4$

Grafik naik atau turun ditentukan dengan:

$$F(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$$

$$F'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$= 3(x + 3)(x - 1)$$

Jika $f'(x) > 0$, maka $3(x + 3)(x - 1) > 0$

$$x > 1 \text{ atau } x < -3$$

$$\text{Jika } f'(x) < 0 \text{ maka } 3(x+3)(x-1) < 0$$

$$-3 < x < 1$$

Jadi, grafik $f(x)$ naik bila $x > 1$ atau $x < -3$ dan grafik $f(x)$ turun bila $-3 < x < 1$

Titik titik ekstrim dan jenisnya dapat ditentukan sebagai berikut:

$$F(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$$

$$F'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$F''(x) = 6x + 6$$

$$\text{Jika } f'(x) = 0, \text{ maka } 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3 \text{ atau } x = 1$$

$$\text{Untuk } x = -3, f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 3 = 30$$

$$\text{Untuk } x = 1, f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 3 = -2$$

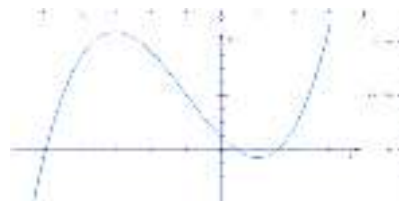
Titik ekstrim $(-3, 30)$ dan $(1, -2)$

$$F''(x) = 6x + 6, F''(-3) = 6(-3) + 6 = -12$$

$$F''(1) = 6(1) + 6 = 12$$

Jadi titik $(-3, 30)$ titik ekstrim maksimum dan titik $(1, -2)$ titik ekstrim minimum.

Sketsa grafik $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$ yaitu:



DAFTAR PUSTAKA

- Muchtar A. karim Gatot Muhsetyo. (1985) *Buku Materi Pokok Matematika*, Jakarta: karunika Jakarta
- Soedarto, Nugroho. (2008). *Matematika 2 untuk SMA atau MA Kelas XI Program IPA*, Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.
- Sutrima. (2009). *Wahana Matematika 2: untuk SMA / MA Kelas XI Program Ilmu Pengetahuan Alam*, Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan
- Djumanta, W. 2008. *Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika 2: untuk Kelas XI Sekolah Menengah Atas / Madrasah Aliyah*, Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.
- Putra, 2004. *Matematika 2B*. Jakarta. Grasindo.
- Mahmudi, Sri Harini. (2006). *Matematika Sekolah Menengah Atas*. Jakarta. Widya Utama
- Anang wibowo. (2012). *Galeri Soal Turunan*. MatikZone's Series. <https://matikzone.wordpress.com/>